Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 17 Juin 2024.

Concours blanc, Durée 4 h, calculatrices interdites.

*On rappelle que la réponse à **toute** question doit être **justifiée**.*

1 Géneralisations des puissances de matrices

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ ainsi que $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices dites *unipotentes* de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $U = I + N$ où $N \in \mathcal{N}$ et $I = I_3$ est la matrice identité de $\mathbb{R}^3$.

1. On pose
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
   (a) Préciser, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\det(B^n)$ et $\mathrm{tr}(B^n)$.
   (b) Déterminer $\ker(A - I)$ et en déduire un vecteur e_1 de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(e_1) = e_1$
   (c) Déterminer e_2 et e_3 dans $\mathbb{R}^3$ tel que
$$f(e_2) = 2e_1 + e_2 \quad , \quad f(e_3) = -2e_2 + e_3$$
   (d) En déduire une matrice P inversible tel que $A = PBP^{-1}$.
   (e) En déduire, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\det(A^n)$ et $\mathrm{tr}(A^n)$.
2. (a) Monter que $\mathcal{N}$ est un sous espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et la dimension.
   (b) Monter que $\mathcal{N}$ est stable par produit c'est à dire que si $N \in \mathcal{N}$ et $M \in \mathcal{N}$ alors $N.M \in \mathcal{N}$.
   (c) Calculer M^3 pour $N \in \mathcal{N}$.
3. (a) L'ensemble $\mathcal{U}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$?
   (b) Monter que $\mathcal{U}$ est un sous groupe de $GL_3(\mathbb{R})$ où $GL_3(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices inversibles de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Soit $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ tel que $U = I + N$. On rappelle que U est inversible. .
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :
$$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2$$
On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ tel que défini est une notation, ce n'est pas une puissance.
   (a) Montrer cependant que si $n \in \mathbb{N}$ et U^n désigne la puissance *classique* alors
$$U^{(n)} = U^n$$
On pourra utiliser la formule du binôme.

(b) Montrer si $n \in \mathbb{N}$ et U^{-n} désigne la puissance *classique* alors

$$U^{(-n)} = U^{-n}$$

(c) Montrer que si α et β sont réels alors

$$U^{(\alpha)}.U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad (U^{(\alpha)})^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}$$

5. A l'aide des résultats précédents, expliciter une matrice C tel que $C^2 = B$.
6. Expliciter une matrice D tel que $D^2 = A$.

2 Somme des coefficients d'une matrice orthogonale

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice orthogonale de $M_n(R)$ avec $n \geq 2$, c'est-à-dire vérifiant $AA^T = A^TA = I_n$. Le but de l'exercice est d'établir une majoration de la valeur absolue de la somme S des coefficients de la matrice orthogonale A, c'est à dire du nombre

$$|S| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

On note par ailleurs, $<,>$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et U le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Démontrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$| < AU, U > | \leq n.$$

2. En déduire que $|S| \leq n$.
3. Déterminer une matrice orthogonale pour laquelle $|S| = n$.
4. On étudie le cas d'égalité en dimension 2.

(a) Rappeler pourquoi les formes possibles des matrices orthogonales de rang 2 sont

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où θ est réel.

(b) En déduire les matrices S orthogonales de rang 2 vérifiant $|S| = 2$.

3 Probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On considère une urne contenant n boules indiscernables numérotées de 1 à n.
On tire au hasard une boule puis on la retire de l'urne ainsi que toutes les boules ayant un numéro supérieur à celui de la boule tirée.. On réitère l'expérience jusqu'à ce que l'urne soit vide et on note X_n la varible aléatoire égale au nombre de tirages réalisés pour vider l'urne.
Pour un entier i, on notera N_i la variable aléatoire égale au numéro de la i-ième boule tirée s'il y a eu au moins i tirages et 0 sinon.

1. Trouver la loi de X_2, puis donner son espérance et sa variance.
2. Trouver la loi de X_3 et donner son espérance.
3. Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre X_n.

4. Déterminer $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = n)$.
5. Prouver (*on citera le résultat du cours utilisé*) que pour $k \geq 2$:

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1)$$

6. Montrer que

$$(n+1)\mathbb{E}(X_{n+1}) - n\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_n) + 1$$

puis que

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{n+1}$$

7. Déduire une expression de l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ sous la forme d'une somme.
8. Montrer (*on pourra utiliser des intégrales*) que si $n \geq 2$:

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

9. En déduire un équivalent simple de $\mathbb{E}(X_n)$ pour $n \to \infty$.

4 Séries et fonctions

On rappelle que si $k \leq n$ sont des entiers naturels :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

1. Déterminer c_0, c_1, c_2.
2. Montrer que si $k \in \mathbb{N}$:

$$(4k+2)c_k = (k+2)c_{k+1}$$

3. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, c_n est un entier naturel.
5. Montrer que si $k \in \mathbb{N}^*$:

$$4\left(\frac{k}{k+1}\right)^{3/2} \leq \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq 4\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{3/2}$$

puis que si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{4}\frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq \frac{4^n}{n\sqrt{n}}$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} k c_k c_{n-k}$$

6. Montrer (*On pourra poser $i = n - k$ dans la somme qui définit T_n*) que si $n \in \mathbb{N}^*$: $T_n = \frac{n}{2}S_n$.
7. Montrer à l'aide de l'égalité de la question 2 que si $n \in \mathbb{N}$:

$$c_{n+1} + 4T_n + 2S_n = T_{n+1} + S_{n+1}$$

8. Montrer alors par récurrence, toujours en utilisant la question 2, que si $n \in \mathbb{N}$: $c_{n+1} = S_n$.

On a ainsi montré que si $n \in \mathbb{N}$:

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$$

9. Montrer que si $x \in [-1/4, 1/4]$, la série $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ est absolument convergente.

On pose pour $x \in [-1/4, 1/4]$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{ et } \quad g(x) = 2xf(x)$$

On admet que la fonction f est continue sur $[-1/4, 1/4]$.

10. En utilisant un produit de Cauchy, montrer que si $x \in [-1/4, 1/4]$:

$$(f(x))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n-1}$$

11. En déduire que si $x \in [-1/4, 1/4]$:

$$(g(x))^2 = 2g(x) - 4x$$

puis qu'il existe une fonction ϵ définie sur $[-1/4, 1/4]$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que : si $x \in [-1/4, 1/4]$:

$$g(x) = 1 + \epsilon(x)\sqrt{1 - 4x^2}$$

12. Montrer que ϵ est continue sur $]-1/4, 1/4[$.
13. Conclure que : $\forall x \in [-1/4, 1/4]$:

$$g(x) = 1 - \sqrt{1 - 4x^2}$$