Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 3 Septembre 2024.

# Fiche 1 : calculs de base.

**Exercice 1**

Développer $(a+b)^3$ ; $(a-b)^3$ ; $(a+b)^2+(a-b)^2$ ; $(a+b)^2-(a-b)^2$.
($a$, $b$ sont des réels).

**Exercice 2**

Soit $x$ et $y$ des réels. Montrer que si $x+y=1$ alors $x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}$.

**Exercice 3**

Soient $x$ et $y$ des réels strictement positifs, montrer que :

1. $x+\frac{1}{x} \geq 2$ (cas d'égalité ?) ;
2. $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ (cas d'égalité ?) ;

**Exercice 4**

$x$, $y$ et $z$ sont des réels.

1. Développer $(x+y+z)(xy+yz+zx)$, $(x+y+z)^3$.
2. Montrer que si $x+y+z=0$, alors $x^3+y^3+z^3=3xyz$

**Exercice 5**

Résoudre les équations ou inéquations d'inconnue $x$ réelle :

1. $4x^4-21x^2+27=0$ ;
2. $\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x+4}=\frac{1}{x}$ ;
3. $(5-2x)^2 > (2x-5)(x-2)$ ;
4. $\sqrt{x^2+2x+4}=3x+2$ ;
5. $x+3 \leq \sqrt{x^2+4}$ ;
6. $x+1 < \sqrt{x+2}$.

**Exercice 6**

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n=(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n$. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_{n-1}=2u_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n$ est un entier pair.

**Exercice 7**

On considère : $\alpha > \beta$ les racines du polynôme $P=x^2-x-1$.
et d'autre part $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite (dite de **Fibonacci**) définie par :

$$\begin{cases} F_0=0,\ F_1=1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad F_{n+1}=F_n+F_{n-1} \end{cases}$$

1. Calculer les premiers termes de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ montrer que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers.
2. Calculer $\alpha$ et $\beta$.
3. Montrer par récurrence avec prédécesseur que si $n$ est un entier :

$$F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}$$