Fiche 14 : Fonctions trigonométriques réciproques.

Exercice 1

1. Á l'aide de la fonction arctan, déterminer des arguments des nombres complexes : $(2+i)$, $(7+i)$ et $(1+i)$.
2. Montrer la relation :
$$2(2+i)^2 = (1+i)(7+i)$$
3. En déduire la formule :
$$2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$$
4. En s'inspirant de ce qui précède, montrer :
$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$
5. Montrer la relation :
$$\frac{(5+i)^4}{(239+i)} = 2(1+i)$$
6. En déduire une autre formule concernant $\frac{\pi}{4}$ (formule de Machin).

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 3

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul, où x et y sont réels.
On sait qu'on peut l'écrire de façon unique sous la forme $z = x + iy = re^{i\theta}$, où $\theta \in]-\pi, \pi]$ et $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

1. Montrer que si $x > 0$, alors $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.
2. Montrer que si $\theta \in]-\pi, \pi[$, alors $\theta = 2\arctan\left(\frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}\right)$.
3. En déduire que si z n'est pas réel négatif ou nul, on a l'égalité
$$\theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Exercice 4

On pose pour $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \quad ; \quad g(x) = 2\arctan(x)$$

4. Justifier que f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$: $\sin(g(x)) = \sin(f(x))$.
6. En déduire que pour $-1 \leq x \leq 1$,
$$f(x) = g(x)$$
7. Proposer et justifier une formule analogue à celle de la question précédente pour $x < -1$ et pour $x < -1$.
8. Retrouver les résultats précédents en déterminant, (là où c'est possible) f' et g'.