Chapitre 4 : Équations différentielles à coefficients constants

En vue des applications en physique et SI, on étudie les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2 à coefficients constants.

Plan

1 Dérivation des fonctions complexes

Rappelons qu'on a posé si $z = a + ib$ avec a et b réels :

$$\exp(z) = \exp(a + ib) = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$$

Si I est un intervalle réel et f est une fonction complexe définie sur I :

$$f : \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(t) = \mathrm{Re}(f(t)) + i\,\mathrm{Im}(f(t)) \end{cases}$$

la fonction f est continue (respectivement dérivable) si et seulement si les fonctions réelles $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. Si f est dérivable alors sa fonction dérivée est :

$$f' : \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f'(t) = \mathrm{Re}(f)'(t) + i\,\mathrm{Im}(f)'(t) \end{cases}$$

Les règles classiques de dérivation s'appliquent aux fonctions complexes à condition de traiter i comme une constante.

Si t est réel et a complexe :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(a.t)) = a.\exp(a.t)$$

2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

On fixe un intervalle I.

2.1 Équation générale

On considère une constante et une fonction $t \to b(t)$ définie (continue) réelle ou complexe sur I.

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant** le problème :

Trouver les fonctions $t \to y(t)$ (réelles ou complexes) définies et dérivables sur I telles que :

$$(E) : \forall t \in \mathbb{R} : \; y'(t) + ay(t) = b(t)$$

On dit qu'on fixe **une condition initiale** en $t_0 \in I$ si on impose de plus $y(t_0) = y_0$ où $y_0 \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On s'intéresse alors en fait au système qu'on appelle **équation différentielle (linéaire du premier ordre à coefficient constant) avec condition initiale**, ou **problème de Cauchy** :

$$(E) \begin{cases} \forall t \in I : \; y'(t) + a \cdot y(t) = b(t) \\ y(t_0) = \lambda \end{cases}$$

Le **second membre** est la fonction $t \to b(t)$.

Si $b = 0$, on dit que l'équation est **homogène** (ou "sans second membre"). Sinon, on s'intéresse dans un premier temps à l'**équation homogène** associée :

$$(E_0) : \; \forall t \in \mathbb{R} : \; y'(t) + ay(t) = 0 \qquad \text{c'est à dire} \qquad y'(t) = -ay(t)$$

2.2 Équation homogène

On considère d'abord l'équation homogène à coefficient constant :

$$(E_0): \ \forall t \in \mathbb{R}: \quad y'(t) + ay(t) = 0 \ \text{ ou } \ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + ay(t) = 0$$

(a réel ou complexe).

On obtient :

Théorème 1 *L'équation différentielle homogène avec condition initiale en t_0 (dite **de Cauchy**) :*

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}: \ y'(t) = -a \cdot y(t) \\ y(t_0) = \lambda \end{cases}$$

a une et une seule solution sur $\mathbb{R}$: la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}: \ y(t) = \lambda.e^{-a(t-t_0)}$$

Théorème 2 *L'équation différentielle homogène :*

$$\forall t \in \mathbb{R}: \ y'(t) = -ay(t)$$

où a est une constante a pour seules solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$t \to y(t) = \lambda.e^{-a.t}$$

où λ est un paramètre réel (complexe si on cherche les solutions complexes).

On dit dans ce contexte que $t \to y(t) = \lambda.e^{-a.t}$ est **la solution générale de l'équation** $y' = -ay$

2.3 Équation avec second membre

On s'intéresse maintenant à l'équation avec second membre défini sur I un intervalle de $\mathbb{R}$:

$$(E): \forall t \in I: \ y'(t) + ay(t) = b(t)$$

Imaginons qu'on connaisse une solution fixée (dite **solution particulière**) $t \to y_1(t)$ de (E), alors $t \to y(t)$ est solution de (E) (une telle fonction existe toujours mais c'est un résultat difficile à prouver et que nous admettons) si et seulement si :

$$\forall t \in I: \ y'(t) - y_1'(t) = -a(y(t) - y_1(t))$$

autrement dit, si et seulement si $t \to y_0(t) = y(t) - y_1(t)$ est une solution de l'équation homogène :

$$(E_0): \forall t \in \mathbb{R}: \ y_0'(t) = -a \cdot y_0(t).$$

On a donc le résultat suivant :

Théorème 3 *Si la fonction $t \to y_1(t)$ est une solution particulière fixée de (E) alors toute solution de (E) s'écrit sous la forme :*

$$t \to y(t) = y_0(t) + y_1(t)$$

où $t \to y_0(t)$ est une solution de l'équation homogène (E_0). Réciproquement, si $t \to y_0(t)$ est une solution (quelconque) de (E_0) alors $\forall t \in I : \; y(t) = y_0(t) + y_1(t)$ est une solution de (E).

*On dira que : **la solution générale de** (E) est obtenue en ajoutant à **une solution particulière de** (E) **la solution générale de** (E_0).*

La solution générale de (E_0) est donc donnée par $\forall t \in \mathbb{R} : \; y(t) = y_1(t) + \lambda e^{-at}$ où $t \to y_1(t)$ une solution particulière de (E). Le coefficient λ est déterminé le cas échéant par les conditions initiales. On obtient ainsi :

Théorème 4 *L'équation différentielle avec condition initiale en $t_0 \in I$ (dite condition de **de Cauchy**) :*

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} : \; y'(t) + a \cdot y(t) = b(t) \\ y(t_0) = \lambda \end{cases}$$

a une et une seule solution sur $\mathbb{R}$.

2.4 Détermination d'une solution particulière de (E)

Il reste à déterminer une solution particulière de (E) : $t \to y_1(t)$.

Dans les cas qu'on rencontrera dans un premier temps, on cherche $y_1(t)$ par coefficients indéterminés à l'aide des règles suivantes :

- si $t \to b(t)$ est une **constante**, chercher y_1 **constante**,
- si $t \to b(t)$ est **polynomiale**, chercher $y_1(t)$ **polynomiale** de même degré,
- si $t \to b(t)$ est **exponentielle**, chercher $y_1(t)$ **exponentielle** de même base,
- si $t \to b(t)$ est **trigonométrique**, chercher $y_1(t)$ **trigonométrique** de même fréquence (éventuellement en utilisant les exponentielles complexes).

Dans le dernier cas, si $t \to b(t) = A\cos(\omega t) = \mathrm{Re}(A\exp(i\omega t))$ (A constante), on peut chercher une solution particulière de l'équation : $\forall t \in \mathbb{R} : \; y'(t) - ay(t) = A\exp(i\omega t)$ sous la forme $t \to Z.\exp(i\omega t)$ (Z constante complexe). Sa partie réelle sera une solution particulière de notre équation.

On procède de même si $b : t \to A\sin(\omega t)$ en considérant les parties imaginaires.

2.5 Remarque

Dans le cas de l'équation $\forall t \in \mathbb{R} : \ y'(t) - ay(t) = \exp(at)$*, il faut chercher* $t \to y_1(t)$ *sous la forme* $y_1(t) = \mu t \exp(at)$ *avec* μ *constante.*

3 Équation différentielle du second ordre

On s'intéresse ici aux **équations différentielles linaires du second ordre à coefficients constants** c'est à dire aux équations de la forme :

$$(E) : \forall t \in \mathbb{R} : \ a.y''(t) + b.y'(t) + c.y(t) = f(t)$$

où $a \neq 0$, b et c sont des **constantes** (à priori complexes mais dans la pratique souvent réelles) et f est une fonction (continue) sur $\mathbb{R}$.

On appelle **équation homogène associée** l'équation :

$$(E_0) : \forall t \in \mathbb{R} : \ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

On appelle **équation caractéristique** associée l'équation :

$$(E_c) : \quad ar^2 + br + c = 0$$

Attention, c'est une équation algébrique et non différentielle... Ses solutions sont des nombres !

3.1 Résolution de l'équation homogène

On s'intéresse dans un premier temps à l'équation homogène

$$(E_0) : \forall t \in \mathbb{R} : \ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

Si α est un complexe fixé et si $t \to e^{\alpha t}$ est solution de (E_0) alors α est solution de (E_c) et réciproquement.

Les fonctions précédentes sont donc les seules solutions exponentielles de (E).

3.1.1 Résolution réelle

On suppose ici que a,b et c sont réels et qu'on cherche les solutions réelles de E_0.

On admet le résultat suivant :

Théorème 5 *Si l'équation* (E_c) *a un discriminant strictement positif et donc 2 racines* α_1 *et* α_2 *réelles distinctes alors l'équation* (E_0) *a pour seules solutions (réelles) les fonctions de la forme :*

$$t \to y(t) = \lambda_1 e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 e^{\alpha_2 t}$$

où λ_1 et λ_2 sont 2 constantes réelles.

Si l'équation (E_c) a un discriminant nul et donc 1 racine double α réelle alors l'équation (E_0) a pour seules solutions (réelles) les fonctions de la forme :

$$t \to y(t) = \lambda_1 e^{\alpha t} + \lambda_2 t e^{\alpha t} = (\lambda_1 + \lambda_2 t)e^{\alpha t}$$

où λ_1 et λ_2 sont 2 constantes réelles.

Si l'équation (E_c) a un discriminant strictement négatif et donc 2 racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ avec α et β réels alors l'équation (E) a pour seules solutions réelles les fonctions de la forme :

$$t \to y(t) = \lambda_1 \cos(\beta t)e^{\alpha t} + \lambda_2 \sin(\beta t)e^{\alpha t} = (\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t))e^{\alpha t}$$

où λ_1 et λ_2 sont 2 constantes réelles.
Les dernières solutions peuvent aussi se mettre sous la forme :

$$t \to y(t) = \lambda \cos(\beta t + \phi)e^{\alpha t}$$

où λ et ϕ sont 2 constantes réelles.

Les constantes λ_1, λ_2 ou β et λ se déterminent en utilisant les conditions initiales. Si des conditions initiales en $t_0 \in \mathbb{R}$ du type :

$$\begin{cases} y(t_0) = \alpha_1 \\ y'(t_0) = \alpha_2 \end{cases}$$

dites **conditions de Cauchy** sont fixées alors l'équation a une et une seule solution.

Exemple à connaitre par cœur :

La solution réelle générale de l'équation

$$y'' = -\omega^2 y$$

$(\omega > 0)$ est donnée par :

$$t \to y(t) = \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t)$$

où λ_1 et λ_2 sont 2 constantes réelles.

ou

$$t \to y(t) = \lambda \cos(\omega t + \phi)$$

λ et ϕ sont 2 constantes réelles.

3.1.2 Résolution complexe

On se replace dans le cas général : a, b et c sont complexes et on cherche les solutions complexes de E_0.

On admet le résultat suivant :

Théorème 6 *Si l'équation* (E_c) *a un discriminant non nul et donc 2 racines* α_1 *et* α_2 *complexes distinctes alors l'équation* (E) *a pour seules solutions (complexes) les fonctions de la forme :*

$$t \to y(t) = \lambda_1 e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 e^{\alpha_2 t}$$

où λ_1 *et* λ_2 *sont 2 constantes complexes.*

Si l'équation (E_c) *a un discriminant nul et donc 1 racine double* α *alors l'équation* (E) *a pour seules solutions complexes les fonctions de la forme :*

$$t \to y(t) = \lambda_1 e^{\alpha t} + \lambda_2 t e^{\alpha t} = (\lambda_1 + \lambda_2 t)e^{\alpha t}$$

où λ_1 *et* λ_2 *sont 2 constantes complexes.*

3.2 Équation avec second membre

3.2.1 Ensemble des solutions

On considère une équation différentielle du second ordre à coefficients constant **et second membre**, c'est à dire une équation du type :

$$(E) : \forall t \in \mathbb{R} : \; ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Comme dans le cas du premier ordre, on lui associe l'équation homogène :

$$(E_0) : \forall t \in \mathbb{R} : \; ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

et on obtient le résultat suivant.

Considérons une fonction $t \to y_1(t)$, solution particulière fixée de (E). On montre, mais c'est un résultat difficile, qu'il en existe toujours.

Théorème 7 *Toute solution de* (E) *s'écrit sous la forme*

$$t \to y(t) = y_0(t) + y_1(t)$$

où $t \to y_0(t)$ *est une solution de l'équation homogène* (E_0). *Réciproquement, si* $t \to y_0(t)$ *est une solution de* (E_0) *alors* $t \to y(t) = y_0(t) + y_1(t)$ *est une solution de* (E).

On dira que : ***la solution générale de*** (E) ***est obtenue en ajoutant à une solution particulière de*** (E)***, la solution générale de*** (E_0)*.*

De plus, si des conditions initiales du type :

$$\begin{cases} y(t_0) = \alpha_1 \\ y'(t_0) = \alpha_2 \end{cases}$$

(conditions de Cauchy) *sont fixées alors l'équation* (E) *a une et une seule solution.*

3.2.2 Détermination d'une solution particulière

On s'intéresse ici à une équation de la forme

$$(E) : \forall t \in \mathbb{R} : \ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = Ae^{\omega t} = f(t)$$

A et ω éventuellement complexes, ce qui inclus le cas f constante.

On cherchera des solutions particulières à l'aide du résultat suivant :

Propriété 1 *Dans le cas précédent, on cherche une solution particulière sous la forme :*

- λ *constante si* f *est constante.*
- $t \to y(t) = \lambda e^{\omega t}$ *si* ω *n'est pas solution de* (E_c) *ie* $e^{\omega t}$ *n'est pas une solution de* (E)*,*
- $t \to y(t) = t\lambda e^{\omega t}$ *si* ω *est solution simple de* (E_c)*.*
- $t \to t(t) = t^2\lambda e^{\omega t}$ *si* ω *est solution double de* (E_c)*.*

Dans le cas où le second membre est plus compliqué, on a un **principe de superposition** :

Propriété 2 *Dans le cas où l'équation* (E) *se met naturellement sous la forme :*

$$(E) : \forall t \in \mathbb{R} : \ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

il peut être intéressant de chercher une solution particulière $t \to y_1(t)$ *à l'équation :*

$$(E_1) : \forall t \in \mathbb{R} : \ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f_1(t)$$

puis une solution particulière $t \to y_2(t)$ *à l'équation :*

$$(E_2) : \forall t \in \mathbb{R} : \ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f_2(t)$$

On obtient alors une solution particulière à (E) *en posant :*

$$y : t \to y_1(t) + y_2(t)$$

On s'intéresse ensuite à une équation réelle de la forme

$$(E) : \forall t \in \mathbb{R} : \ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \lambda \cos(\omega t)$$

($\omega > 0$) situation très classique en électricité. Dans ce cas la méthode la plus rapide consiste à chercher une solution particulière à l'équation

$$(Ec) : \forall t \in \mathbb{R} : \ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \lambda e^{i(\omega t)}$$

sous la forme $t \to \mu e^{i\omega t}$ (μ complexe) et à prendre la partie réelle de la solution trouvée.

3.2.3 Notion de régime permanent

Dans le cas d'une équation réelle de la forme

$$(E) : \forall t \in \mathbb{R} : \ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \lambda \sin(\omega t)$$

on procède comme au dessus en prenant à la fin la partie imaginaire.

Signalons de plus que si $a >$, $b > 0$ et $c > 0$, toutes les solutions de l'équation homogène associée tendent vers 0 rapidement pour $t \to +\infty$ et peuvent être donc rapidement négligées.

Au bout d'un certain temps $\tau > 0$ petit (qu'on appelle **régime transitoire**), toutes les solutions $t \to y(t)$ de (E) vérifient donc, pour $t\tau a$ (**régime permanent**) :

$$y(t) \simeq \mu e^{i\omega t}$$

En électricité-électronique, dans beaucoup de cas, on ne calcule donc pas la solution générale de l'équation homogène mais seulement, sous la forme précédente, la solution particulière de l'équation avec second membre.

3.3 Synthèse

Finalement, pour résoudre l'équation différentielle

$$(E) : \forall t \in \mathbb{R} : \ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

on suit les étapes suivantes :

1. On détermine la solution générale de l'équation homogène associée

$$(E_0) : \forall t \in \mathbb{R} : \ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

   en utilisant l'équation caractéristique

$$(E_c) : ar^2 + br + c = 0$$

2. On cherche une solution particulière y_1 de (E) éventuellement via le principe de superposition.
3. La solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E_0) et de y_1.
4. On détermine, si besoin, les constantes d'intégration à l'aide des conditions initiales.

Savoir faire indispensable

Résolution des équations linéaires à coefficients constants, d'ordre 1 ou 2, avec ou sans conditions de Cauchy.