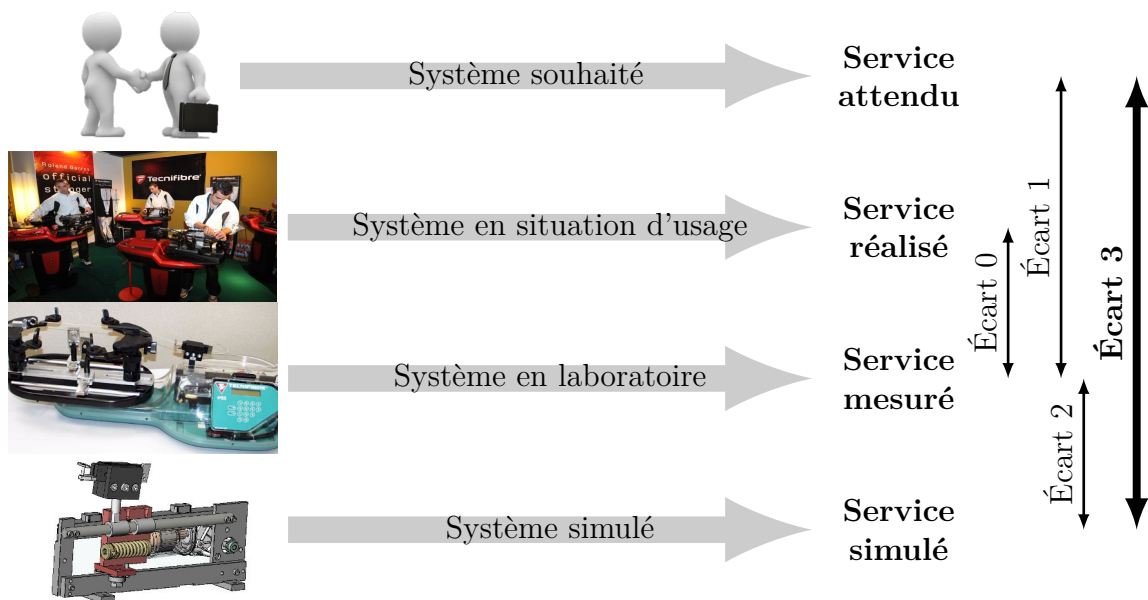


Modélisation et comportement des systèmes asservis

— *Éléments de correction des TDs* —



Écart 0 – évalue la fiabilité et la fidélité du système de laboratoire didactisé par rapport au système réel. Il répond aux questions « le système de laboratoire est-il représentatif du système réel ? Permet-il de l'étudier de manière fiable ? »

Écart 1 – évalue le respect du CDCF par le système réel sur prototype instrumenté en laboratoire. Il répond à la question « le système réalisé, répond-il au CDCF ? ».

Écart 2 – évalue la fiabilité du modèle et de ses hypothèses. Il répond à la question « le modèle est-il correct ? ».

Écart 3 – évalue, en phase de conception, le respect du CDCF à partir d'un modèle simulé. Il répond à la question « le modèle du système satisfait-il les exigences du CDCF ? ».

Activités de TD

Exercices

Exercice 1 – Broche de tour à commande numérique	3
Exercice 2 – Modélisation d'un moteur à courant continu	7
Exercice 3 – Système de dosage pondéral	11
Exercice 4 – Étude du système de freinage ABS	13
Exercice 5 – Asservissement en position d'un axe de robot	16
Exercice 6 – Poste de soufflage	19
Exercice 7 – Enceinte thermostatée	21
Exercice 8 – Bras de robot à muscles artificiels	24
Exercice 9 – Commande de pales d'hélicoptères	28
Exercice 10 – Robot pour la chirurgie endoscopique	33
Exercice 11 – Échelle E.P.A.S. de pompier	38



Nicolas Mesnier, lycée Jean Perrin, Lyon
Compléments & mises à jour sur le site des MPSI
<https://cahier-de-prepa.fr/mpsi-perrin>

— Version du 10 novembre 2024 —

Broche de tour à commande numérique

Question 1.1. Un système asservi est un système bouclé, générateur d'écart entre une grandeur de consigne et une mesure. Ici, aucune mesure n'est effectuée. La boucle de retour est simplement issue des équations modélisant le comportement du moteur à courant continu. Le système n'est donc pas un système asservi.

Question 1.2. Par lecture directe du schéma-blocs, il vient :

$$\Omega_{\text{pièce}}(p) = \left[(U_{\text{cons}}(p) - K_e \Omega_{\text{pièce}}(p)) \frac{K_c}{R} - C_u(p) \right] \frac{1}{Jp}$$

soit

$$\Omega_{\text{pièce}}(p) = \frac{K_c}{R J p + K_e K_c} U_{\text{cons}}(p) - \frac{R}{R J p + K_e K_c} C_u(p)$$

Question 1.3. Sous forme canonique, l'expression précédente s'écrit

$$\Omega_{\text{pièce}}(p) = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{R J}{K_e K_c} p} U_{\text{cons}}(p) - \frac{\frac{R}{K_e K_c}}{1 + \frac{R J}{K_e K_c} p} C_u(p)$$

Essai à vide

Question 1.4. L'écart est défini comme la différence entre la tension de consigne $u_{\text{cons}}(t)$ et le retour de rétro-action $K_e \omega_{\text{pièce}}(t)$. On a alors :

$$\varepsilon(p) = U_{\text{cons}}(p) - K_e \Omega_{\text{pièce}}(p) = U_{\text{cons}}(p) \left(1 - \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{R J}{K_e K_c} p} \right)$$

soit :

$$\varepsilon(p) = \frac{u_0}{p} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{R J}{K_e K_c} p} \right)$$

Question 1.5. Par théorème de la valeur finale, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{u_0}{p} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{R J}{K_e K_c} p} \right)$$

Finalement :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$$

Question 1.6. La réponse du système dans le domaine de Laplace est :

$$\Omega_{\text{pièce}}(p) = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{R J}{K_e K_c} p} \cdot \frac{u_0}{p}$$

Par le théorème de la valeur initiale, on a :

$$\omega_{\text{pièce}}(0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \Omega_{\text{pièce}}(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{R J}{K_e K_c} p} \frac{u_0}{p}$$

Finalement :

$$\boxed{\omega_{\text{pièce}}(0) = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Par théorème de la valeur finale, on a :

$$\omega_{\text{pièce}}(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Omega_{\text{pièce}}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{R J}{K_e K_c} p} \frac{u_0}{p}$$

d'où

$$\boxed{\omega_{\text{pièce}}(\infty) = \frac{u_0}{K_e}}$$

Question 1.7. En notant $K = \frac{1}{K_e}$ et $\tau = \frac{R J}{K_e K_c}$, la réponse dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$\Omega_{\text{pièce}}(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \cdot \frac{u_0}{p}$$

et correspond à la réponse d'un système du premier ordre à une entrée de type échelon d'amplitude u_0 . Par cours, on donne sa réponse temporelle :

$$\boxed{\omega_{\text{pièce}}(t) = K u_0 (1 - e^{-t/\tau}) \cdot u(t)}$$

Question 1.8. Avec les valeurs numériques :

- $K = \frac{1}{K_e} = \frac{1}{3} \approx 0,33 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$;
- $\tau = \frac{R J}{K_e K_c} \approx 5 \times 10^{-3} \text{ s}$

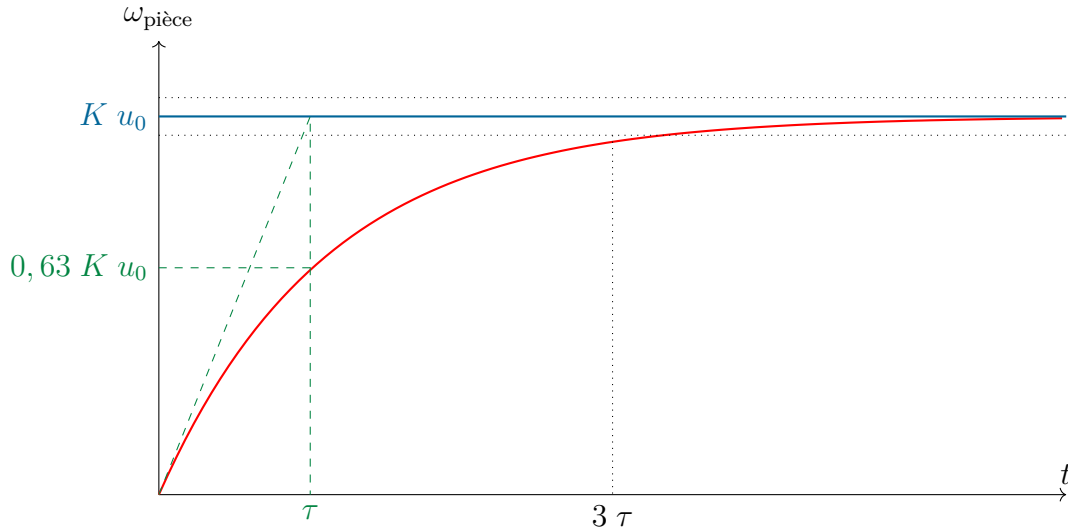
et sachant que le graphe de $\omega_{\text{pièce}}(t)$ possède :

- une asymptote horizontale en $K u_0 \approx 16,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$;
- une tangente initiale qui coupe l'asymptote en $t = \tau$;

et avec les 3 points caractéristiques :

- $\omega_{\text{pièce}}(\tau) = 0,63 K u_0 \approx 10,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$;
- $\omega_{\text{pièce}}(3\tau) = 0,95 K u_0 \approx 15,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$;
- $\omega_{\text{pièce}}(5\tau) = 0,99 K u_0 \approx 16,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$;

Question 1.9. Tracé de la réponse du moteur à une entrée échelon :



Question 1.10. La fonction de transfert étant du premier ordre, on a :

$$T_{ru} = 3 \tau \approx 15 \text{ ms}$$

Essai en usinage

Question 1.11. Considérant $U_{\text{cons}}(t) = 0$, il vient

$$\Omega_{\text{pièce}}(p) = -\frac{\frac{R}{K_e K_c}}{1 + \frac{R J}{K_e K_c} p} C_u(p) = -\frac{\frac{R}{K_e K_c}}{1 + \frac{R J}{K_e K_c} p} \frac{C_{u0}}{p}$$

Par théorème de la valeur finale, on il vient :

$$\omega_{\text{pièce}}(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \Omega_{\text{pièce}}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} -p \cdot \frac{\frac{R}{K_e K_c}}{1 + \frac{R J}{K_e K_c} p} \cdot \frac{C_{u0}}{p}$$

Finalement :

$$\omega_{\text{pièce}}(\infty) = -\frac{R C_{u0}}{K_e K_c}$$

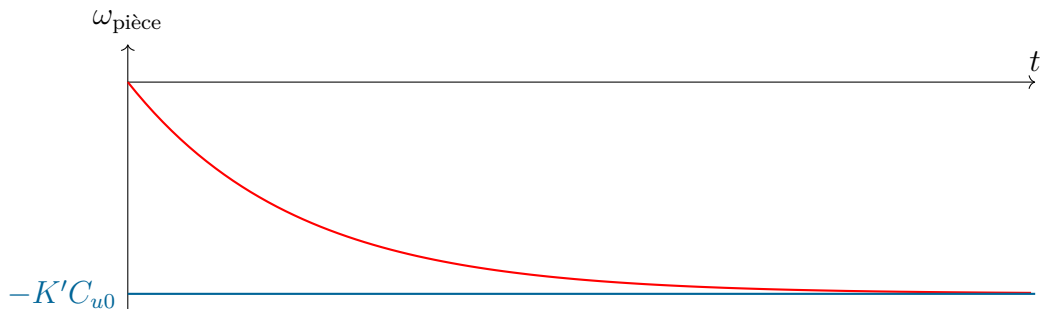
L'application numérique donne

$$\omega_{\text{pièce}}(\infty) \approx -0,56 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Question 1.12. La fonction de transfert $\frac{\Omega_{\text{pièce}}(p)}{C_u(p)}$ est une fonction du premier ordre, de gain $K' = \frac{R}{K_e K_c} \approx 0,056 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ et de même constante de temps τ . On reconnaît donc la réponse à un échelon d'un système du premier ordre :

$$\Omega_{\text{pièce}}(p) = -\frac{C_{u0}}{p} \cdot \frac{K'}{1 + \tau p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{\omega_{\text{pièce}}(t) = -K' C_{u0} (1 - e^{-t/\tau})}$$

Question 1.13. Réponse du système à un échelon de perturbation.



Question 1.14. On constate ici la présence d'une erreur due à la perturbation. Pour annuler cette erreur, il est nécessaire de mettre en place un asservissement. Il est possible d'utiliser une génératrice tachymétrique pour acquérir une image de la vitesse.

Pour que cet asservissement soit robuste, il est nécessaire d'ajouter une action intégrale telle que la BO soit de classe 1, avec l'action intégrale en amont de la perturbation.

Modélisation d'un moteur à courant continu

Question 2.1. L'équation de couplage mécano-électrique (2), permet de déterminer

$$[K_e] = V \cdot s$$

À partir des données du sujet, il vient :

$$\left[\frac{R J}{K_e K_c} \right] = \frac{\Omega \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2}{V \cdot s \cdot N \cdot \text{m} \cdot A^{-1}}$$

Sachant $N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $V = \Omega \cdot A$, on trouve :

$$\left[\frac{R J}{K_e K_c} \right] = s$$

Par loi de comportement d'une bobine, il vient

$$[L] = H = \Omega \cdot s$$

d'où

$$\left[\frac{L J}{K_e K_c} \right] = \left[\frac{R J}{K_e K_c} \right] \times s = s^2$$

Modélisation du moteur

Question 2.2. Dans un premier temps, on exprime les équations (1) à (4) dans le domaine de Laplace en supposant les conditions initiales nulles :

$$U(p) = (R + L p) I(p) + E(p) \tag{1}$$

$$E(p) = K_e \Omega_m(p) \tag{2}$$

$$C(p) = K_c I(p) \tag{3}$$

$$J p \Omega_m(p) = C(p) \tag{4}$$

Les équations (3) et (4) donnent

$$H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{I(p)} = \frac{K_c}{J p}$$

Avec les équations (1) et (2), il vient :

$$H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{R J}{K_e K_c} p + \frac{L J}{K_e K_c} p^2}$$

Finalement, par quotient, il vient :

$$H_1(p) = \frac{H(p)}{H_2(p)} = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{\frac{J p}{K_e K_c}}{1 + \frac{R J}{K_e K_c} p + \frac{L J}{K_e K_c} p^2}$$

Question 2.3. À partir de l'expression précédente, on identifie

$$K = \frac{1}{K_e} = 2,6 \times 10^{-2} \text{ V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a = \frac{L J}{K_e K_c} = 2,503 \times 10^{-6} \text{ s}^2$$

$$b = \frac{R J}{K_e K_c} = 5,508 \times 10^{-3} \text{ s}$$

Question 2.4. Les pôles de $H(p)$ sont les racines du dénominateur, c'est-à-dire les racines du polynôme $ap^2 + bp + 1$ qui sont

$$p_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} \approx -2000 \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} \approx -200$$

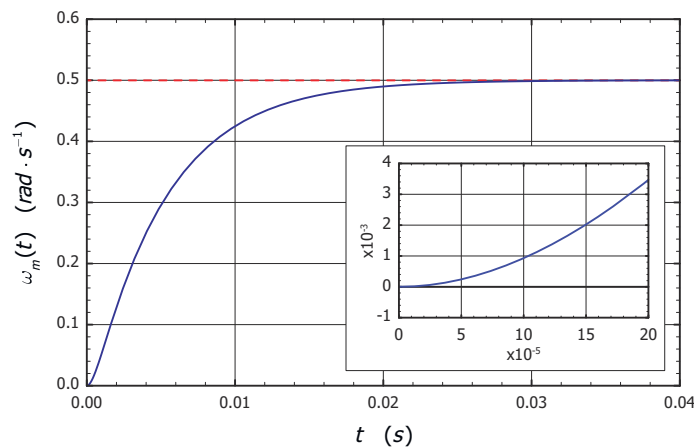
Posant $a' = 2000$ et $b' = 200$, on peut alors factoriser le dénominateur et exprimer $H(p)$ sous la forme

$$H(p) \approx \frac{10000}{(p + 2000)(p + 200)}$$

Question 2.5. Après décomposition en éléments simples de $\Omega_m(p) = H(p) \frac{20}{p}$, il vient l'originale temporelle par transformée de Laplace inverse :

$$\omega_m(t) = \left[0,5 + \frac{1}{18} e^{-2000 t} - \frac{5}{9} e^{-200 t} \right] u_0(t)$$

dont le graphe est donné ci-après.



Question 2.6. D'après les valeurs numériques des pôles trouvées, on a :

$$\frac{p_1}{p_2} = 10 \iff p_1 \ll p_2 \iff \tau_1 \ll \tau_2$$

qui signifie qu'il est possible de négliger τ_1 devant τ_2 . Pour notre étude, cela revient à négliger l'influence dynamique de l'inductance de la bobine et à poser $L = 0$ H. On obtient alors :

$$H(p) = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{R J}{K_e K_c} p} = \frac{2,600 \times 10^{-2}}{1 + 5,508 \times 10^{-3} p}$$

On peut alors considérer, pour l'étude du régime stationnaire du moins, que le moteur se comporte comme un système du premier ordre.

Question 2.7. On a :

$$\Omega_m(p) = \frac{a}{p^2} \cdot \frac{0,026}{1 + 5,5 \times 10^{-3} p} \approx \frac{4 a}{p^2 (p + 200)}$$

On cherche à décomposer en éléments simples cette fonction sous la forme :

$$\Omega_m(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p + 200} = \frac{(Ap + B)(p + 200) + Cp^2}{p^2 (p + 200)}$$

Pour que les deux expressions de $\Omega_m(p)$ soient identiques, il suffit que les polynômes des 2 numérateurs soient égaux ; soit :

$$\begin{cases} (p^0) : 4a = 200B \\ (p^1) : 0 = 200A + B \\ (p^2) : 0 = A + C \end{cases} \iff \begin{cases} A = -a \cdot 10^{-4} \\ B = \frac{a}{50} = 2a \cdot 10^{-2} \\ C = a \cdot 10^{-4} \end{cases}$$

Il vient finalement l'originale temporelle

$$\omega_m(t) = a \left[-10^{-4} + 2 \cdot 10^{-2} t + 10^{-4} e^{-200t} \right] \cdot u(t)$$

Régulation de vitesse

Question 2.8. Par formule de Black, il vient :

$$F_b(p) = \frac{I(p)}{R_i(p)} = \frac{1}{1 + \frac{K_e K_c \tau_b}{A J K_b}} \cdot \frac{1 + \tau_b}{1 + \frac{A K_b + R}{A J K_b + K_e K_c \tau_b} J \tau_b p}$$

Question 2.9. On détermine cette fois ci, pour la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$FTBO(p) = C_v(p) \cdot F_b(p) \cdot H_2(p) \cdot K_g = \frac{K_v K_{bi} K_c K_g}{\tau_v J p^2} \cdot \frac{1 + (\tau_v + \tau_b) p + \tau_v \tau_b p^2}{1 + \tau_{bi} p}$$

avec K_{bi} et τ_{bi} le gain et la constante de temps de la boucle interne, soit

$$K_{bi} = \frac{1}{1 + \frac{K_e K_c \tau_b}{A J K_b}} \quad \text{et} \quad \tau_{bi} = \frac{A K_b + R}{A J K_b + K_e K_c \tau_b}$$

Avec la fonction de transfert en boucle ouverte donnée, il est possible d'identifier **le gain, la classe** et **l'ordre** du système :

- **le gain** correspond au terme constant présent en facteur de la fonction de transfert ;
- **la classe** correspond au nombre d'intégrateurs du système, *i.e.* la puissance de p en facteur de la fonction de transfert ;
- **l'ordre** correspond à la puissance de p au dénominateur de la fonction de transfert.

On identifie donc ici un système de classe 2 et d'ordre 3.

Système de dosage pondéral

Modélisation

Question 3.1. Par lecture directe, il vient :

$$\Omega_m(p) = \frac{1}{J p} \frac{K_t}{R + L p} (U_m(p) - K_e \Omega_m(p))$$

$$\Leftrightarrow H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{K_t}{J p (R + L p)}}{1 + \frac{K_t K_e}{J p (R + L p)}}$$

Finalement, il vient :

$$H_m(p) = \frac{1/K_e}{1 + \frac{R J}{K_t K_e} p + \frac{J L}{K_t K_e} p^2}$$

A.N. :

$$H_m(p) = \frac{6,25}{1 + 0,15 p + 8 \cdot 10^{-4} p^2}$$

Question 3.2. Il est possible de vérifier si le dénominateur est factorisable par simple calcul du discriminant

$$\Delta = 1,7 \cdot 10^{-2} > 0$$

Comme le discriminant est positif, la fonction de transfert admet 2 pôles réels

$$p_1 = -6,6 \rightarrow \tau_1 = \frac{-1}{p_1} = 0,15 \text{ s} \quad \text{et} \quad p_2 = -193 \rightarrow \tau_2 = \frac{-1}{p_2} = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$$

tels que l'on puisse factoriser le dénominateur de la fonction de transfert sous la forme :

$$H_m(p) = \frac{6,25}{(1 + 0,15p)(1 + 5 \cdot 10^{-3}p)}$$

Observant de plus que

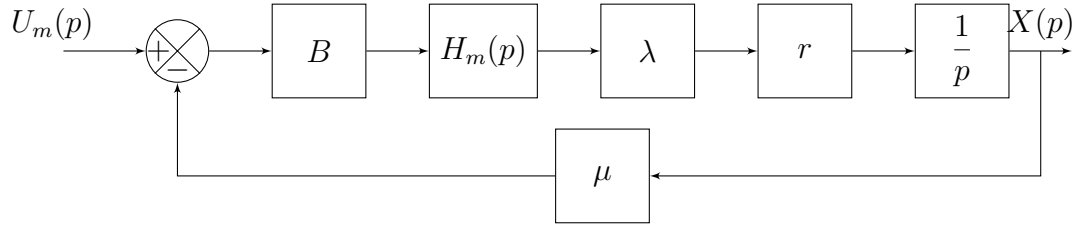
$$\frac{p_1}{p_2} \ll 1 \implies \tau_1 \ll \tau_2$$

il est alors possible de simplifier l'expression de la fonction de transfert par :

$$H_m(p) = \frac{6,25}{1 + 0,15 p}$$

Asservissement en position du sas

Question 3.3.



Question 3.4. Par formule de Black, il vient :

$$F(p) = \frac{\frac{K_m}{1 + \tau_m p} \lambda R \frac{1}{p}}{1 + \frac{K_m}{1 + \tau_m p} \lambda R \frac{1}{p} \mu} = \frac{K_m \lambda r}{p (1 + \tau_m p) + K_m \lambda r \mu}$$

Finalement :

$$F(p) = \frac{10^{-2}}{1 + 15,2 p + 2,42 p^2}$$

Question 3.5. Par simple calcul du discriminant $\Delta = 1,7 \cdot 10^{-2} > 0$, on remarque que la fonction de transfert admet 2 pôles réels

$$p_1 = -0,066 \rightarrow \tau_1 = \frac{-1}{p_1} = 16,7 \text{ s} \quad \text{et} \quad p_2 = -6,2 \rightarrow \tau_2 = \frac{-1}{p_2} = 0,16 \text{ s}$$

vérifiant $\tau_1 \gg \tau_2$, d'où l'approximation

$$F(p) = \frac{10^{-2}}{1 + 16,7 p}$$

Asservissement en masse de la quantité de produit versée

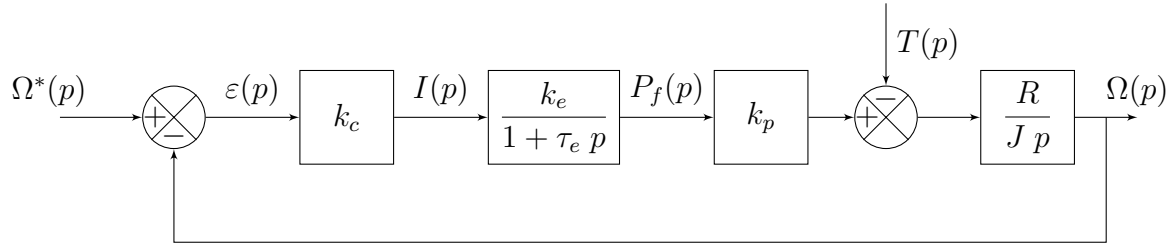
Question 3.6. Pour que l'écart soit l'image de l'erreur, il faut que $\boxed{\text{Adapt} = \delta}$.

Question 3.7. Pour optimiser le pesage il faut que l'erreur soit nulle, ce qui est le cas si le gain de la FTBF est unitaire ou, de façon équivalente, si la BO est de classe 1 ; ce qui est le cas ici. On vérifie bien

$$\text{BF}(p) = \frac{A \delta K K_1}{p (1 + \tau p) + A \delta K K_1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{A \delta K K_1} p + \frac{\tau}{A \delta K K_1} p^2}$$

Étude du système de freinage ABS

Question 4.1.



Question 4.2. Par lecture directe, on a

$$\varepsilon(p) = \Omega^*(p) - \Omega(p)$$

Avec

$$\Omega(p) = \frac{k_c k_e k_p R}{J p (1 + \tau_e p)} \varepsilon(p)$$

il vient, par substitution,

$$\varepsilon(p) \left[1 + \frac{k_c k_e k_p R}{J p (1 + \tau_e p)} \right] = \Omega^*(p) \iff \boxed{\varepsilon(p) = \frac{(1 + \tau_e p) J p}{(1 + \tau_e p) J p + k_c k_e k_p R} \Omega^*(p)}$$

Question 4.3. Par théorème de la valeur finale, il vient

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{(1 + \tau_e p) J p}{(1 + \tau_e p) J p + k_c k_e k_p R} \cdot \frac{\omega_c}{p}$$

Finalement :

$$\boxed{\varepsilon_s = 0}$$

Question 4.4. Par lecture directe, il vient

$$\varepsilon(p) = \frac{-R}{J p} \left[\varepsilon(p) \frac{k_c k_e k_p}{1 + \tau_e p} - T(p) \right] \iff \boxed{\varepsilon(p) = \frac{(1 + \tau_e p) R}{(1 + \tau_e p) J p + k_c k_e k_p R} T(p)}$$

Question 4.5. Par théorème de la valeur finale, il vient :

$$\varepsilon'_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon'(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{(1 + \tau_e p) R}{(1 + \tau_e p) J p + k_c k_e k_p R} \cdot \frac{T_0}{p}$$

$$\boxed{\varepsilon'_s = \frac{T_0}{k_c k_e k_p}}$$

Question 4.6. Avec cette nouvelle fonction de transfert pour l'électrovanne, on a maintenant

$$\varepsilon'(p) = \frac{(1 + \tau_e p) p R}{(1 + \tau_e p) J p^2 + k_c k_e k_p R} T(p)$$

qui conduit à un nouveau calcul de l'erreur

$$\varepsilon'_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{(1 + \tau_e p) p R}{(1 + \tau_e p) J p^2 + k_c k_e k_p R} \cdot \frac{T_0}{p}$$

d'où

$$\boxed{\varepsilon'_s = 0}$$

Question 4.7. Par formule de Black, il vient :

$$\frac{\Omega(p)}{T(p)} = \frac{-\frac{R}{Jp}}{1 + \frac{k_c k_e k_p R}{Jp(1 + \tau_e p)}} = \frac{-R(1 + \tau_e p)}{k_c k_e k_p R + Jp(1 + \tau_e p)}$$

d'où, finalement,

$$\boxed{\frac{\Omega(p)}{T(p)} = \frac{-1}{k_c k_e k_p} \cdot \frac{1 + \tau_e p}{1 + \frac{J}{k_c k_e k_p R} p + \frac{J \tau_e}{k_c k_e k_p R} p^2}}$$

Question 4.8. Compte tenu de la fonction de transfert proposée et de l'entrée considérée, il vient :

$$\Omega(p) = K \cdot \frac{1 + \frac{p}{50}}{\left(1 + \frac{p}{25}\right)} \cdot \frac{T_0}{p} = \frac{25 K T_0 (50 + p)}{2 p (25 + p)^2}$$

On cherche alors une décomposition en éléments simples de la forme

$$\Omega(p) = \frac{25KT_0}{2} \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{25+p} + \frac{C}{(25+p)^2} \right) = \frac{25KT_0}{2} \left(\frac{A(25+p)^2 + Bp(25+p) + Cp}{p(p+25)^2} \right)$$

telle que l'originale temporelle soit :

$$\omega(t) = \frac{25KT_0}{2} \left(A + Be^{-25t} + Cte^{-25t} \right) u(t)$$

Pour que les deux expressions de $\Omega(p)$ soient égales, il suffit que les polynômes des deux numérateurs soient égaux, soit :

$$\begin{cases} (p^0) : 50 = 625A \\ (p^1) : 1 = 50A + 25B + C \\ (p^2) : 0 = A + B \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{2}{25} \\ B = \frac{-2}{25} \\ C = -1 \end{cases}$$

Il vient finalement :

$$\boxed{\omega(t) = K T_0 \left[1 - \left(1 + \frac{25}{2} t \right) e^{-25t} \right] \cdot u(t)}$$

Question 4.9. Le système ne respecte pas le cahier des charges. En effet, nous avons déterminé $\varepsilon'_s \neq 0$. Le système n'est donc pas insensible à la perturbation.

Asservissement en position d'un axe de robot

Étude du moteur en boucle ouverte

Question 5.1. Par définition, la fonction de transfert d'un système du premier ordre de gain K_m et de constante de temps T_m s'écrit :

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K_m}{1 + T_m p}$$

Comme on a $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ qui se traduit dans le domaine de Laplace avec $\theta(0) = 0$ par $\Omega(p) = p\Theta(p)$, il vient finalement :

$$H_2(p) = \frac{\Theta(p)}{U(p)} = \frac{K_m}{(1 + T_m p) p}$$

Question 5.2. Pour une entrée en échelon $U(p) = \frac{U_0}{p}$, il vient

$$\Theta(p) = \frac{U_0 K_m}{(1 + T_m p) p^2}$$

Question 5.3. On cherche pour $\Theta(p)$ une décomposition en éléments simples de la forme

$$\Theta(p) = U_0 K_m \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{1 + T_m p} \right) = U_0 K_m \left(\frac{(Ap + B)(1 + T_m p) + Cp^2}{p^2(1 + T_m p)} \right)$$

telle que l'originale temporelle soit

$$\theta(t) = U_0 K_m \left(A + Bt + \frac{C}{T_m} e^{-t/T_m} \right) u(t)$$

Pour que les deux expressions de $\Theta(p)$ soient égales, il suffit que les 2 polynômes de leurs numérateurs soient égaux ; d'où :

$$\begin{cases} (p^0) : & 1 = B \\ (p^1) : & 0 = A + T_m B \\ (p^2) : & 0 = T_m A + C \end{cases} \iff \begin{cases} A = -T_m \\ B = 1 \\ C = T_m^2 \end{cases}$$

Il vient finalement

$$\theta(t) = U_0 K_m \left(t - T_m + T_m e^{-t/T_m} \right) u(t)$$

qui correspond bien à la réponse d'un système du premier ordre à une rampe.

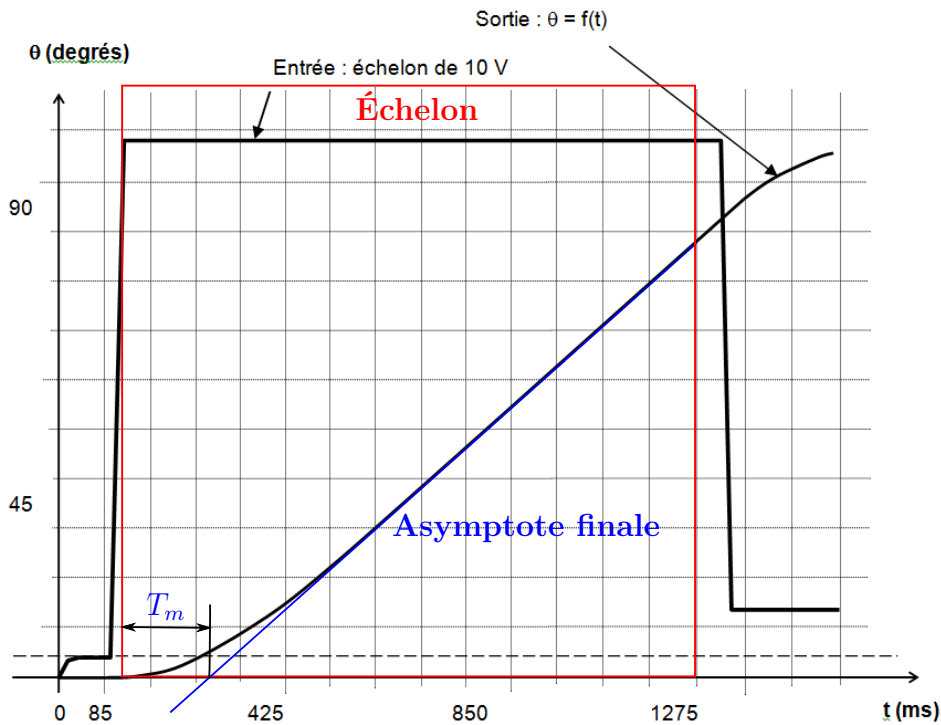
Par théorème de la valeur finale, il vient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\theta}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot p\Theta(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \Omega(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{K_m}{1 + T_m p} \times \frac{U_0}{p}$$

soit finalement :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\theta}(t) = U_0 K_m}$$

Question 5.4. Ignorant la partie de tracé après 1 275 s où l'échelon de tension s'arrête, on trace l'asymptote oblique finale dont l'intersection avec l'axe des abscisses donne la durée T_m et dont la pente vaut $K_m U_0$.



On trouve approximativement :

$$T_m = 170 \text{ ms} \quad \text{et} \quad K_m U_0 = \frac{82}{85 \times 10^{-3} \times (10 + 2/3)} \approx 90^\circ \cdot \text{s}^{-1} \implies K_m \approx 9^\circ \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$$

Étude de la boucle d'asservissement

Question 5.5. En considérant que $K = 1$, il vient par lecture directe :

$$\Theta(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K_m}{1 + T_m p} \cdot K_p [-K_d p \Theta(p) + \Theta_{\text{cons}}(p) - \Theta(p)]$$

d'où :

$$\boxed{H_3(p) = \frac{\Theta(p)}{\Theta_{\text{cons}}(p)} = \frac{1}{1 + \frac{1 + K_d K_m K_p}{K_m K_p} p + \frac{T_m}{K_m K_p} p^2}}$$

Question 5.6. Par identification, on trouve

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K_m K_p}{T_m}}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\omega_0 (1 + K_d K_m K_p)}{2 K_m K_p} \implies \boxed{\xi = \frac{1 + K_d K_m K_p}{2\sqrt{K_m K_p T_m}}}$$

Question 5.7. Pour avoir la réponse la plus rapide possible (avec un dépassement maximal de 5 %), il faut avoir $\xi = 0,69$, d'où :

$$\boxed{\frac{1 + K_d K_m K_p}{2\sqrt{K_m K_p T_m}} = 0,69}$$

Poste de soufflage

Présentation du système

Régulation de la vitesse de rotation de la vis d'Archimède

Question 6.1. Comme le gain K_1 est un adaptateur de consigne, il vaut AK_2 pour que l'écart soit l'image de l'erreur, d'où :

$$K_1 = AK_2 \iff \boxed{A = \frac{K_1}{K_2}} \quad \text{A.N. : } A = \frac{0,12}{20} = 6 \times 10^{-3} \text{ (sans unité)}$$

Relevé expérimental pour déterminer $H(p)$

Question 6.2. On identifie la réponse indicielle d'un système du premier ordre de gain $K = 100 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ et de constante de temps $\tau = 0,2 \text{ s}$.

Vérification du cahier des charges : entrée de type échelon

Question 6.3. Par formule de Black, il vient :

$$H_{\text{BF}} = \frac{K_1 G \frac{K}{1 + \tau p}}{1 + A K_2 G \frac{K}{1 + \tau p}} = \frac{K_1 G \frac{K}{1 + \tau p}}{1 + K_1 G \frac{K}{1 + \tau p}} = \frac{K_1 G K}{1 + K K_1 G + \tau p}$$

soit finalement

$$\boxed{H_{\text{BF}}(p) = \frac{\frac{K_1 G K}{1 + K_1 G K}}{1 + \frac{\tau}{1 + K_1 G K} p}}$$

Par application numérique on trouve pour $G = 1$:

$$K_{\text{BF}} = \frac{0,12 \cdot 100}{1 + 0,12 \cdot 100} = 0,92(-) \quad \tau_{\text{BF}} = \frac{0,2}{1 + 0,12 \cdot 100} = 0,015 \text{ s}$$

Question 6.4. Par théorème de la valeur finale, il vient :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$$

Avec

$$\varepsilon(p) = K_1 (N_e(p) - N_s(p)) = K_1 N_e(p) (1 - H_{\text{BF}}(p)) = \frac{K_1}{p} \left(1 - \frac{K_{\text{BF}}}{1 + \tau_{\text{BF}} p} \right)$$

il vient l'erreur relative

$$\varepsilon_s = K_1 (1 - K_{\text{BF}}) \implies \boxed{\varepsilon_s = \frac{1}{1 + K_1 G K}}$$

qui correspond bien à l'expression $\frac{1}{1 + K_{\text{BO}}}$ avec $K_{\text{BO}} = K G K_1$.

Question 6.5. Pour respecter le cahier des charges avec une erreur maximale de 5 %, il faut que

$$\varepsilon_s \leq 0,05 \iff \frac{1}{1 + K G K_1} \leq \frac{1}{20} \iff \boxed{G \geq \frac{19}{K K_1}}$$

Avec $K = 100 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ et la valeur numérique de K_1 , il vient

$$G \geq \frac{19}{100 \times 0,12} = \frac{18 + 1}{12} = 1,5 + \frac{1}{12} \approx 1,583 \text{ (sans unité)}$$

Vérification du cahier des charges : entrée de type rampe

Question 6.6. Par cours, on a pour un système de (FTBO de) classe 0 :

$$\boxed{\varepsilon_t \rightarrow +\infty}$$

Question 6.7. On cherche pour $N_s(p)$ une décomposition en éléments simples de la forme

$$N_s(p) = K_{\text{BF}} \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{1 + \tau_{\text{BF}} p} \right) = K_{\text{BF}} \left(\frac{(Ap + B)(1 + \tau_{\text{BF}} p) + Cp^2}{p^2 (1 + \tau_{\text{BF}} p)} \right)$$

telle que l'originale temporelle soit

$$n_s(t) = K_{\text{BF}} \left(A + Bt + \frac{C}{\tau_{\text{BF}}} e^{-t/\tau_{\text{BF}}} \right) u(t)$$

Pour que les deux expressions de $N_s(p)$ soient égales, il suffit que les 2 polynômes de leurs numérateurs soient égaux ; d'où :

$$\begin{cases} (p^0) : 1 = B \\ (p^1) : 0 = A + \tau_{\text{BF}} B \\ (p^2) : 0 = \tau_{\text{BF}} A + C \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\tau_{\text{BF}} \\ B = 1 \\ C = \tau_{\text{BF}}^2 \end{cases}$$

Il vient finalement

$$n_s(t) = K_{\text{BF}} \left(t - \tau_{\text{BF}} + \tau_{\text{BF}} e^{-t/\tau_{\text{BF}}} \right) u(t)$$

qui correspond bien à la réponse d'un système du premier ordre à une rampe.

Enceinte thermostatée

Étude de la régulation en température de l'enceinte

Question 7.1. Le second comparateur permet de prendre en compte l'action de la perturbation, ici un flux de chaleur perdu par convection, noté $Q_p(p)$ dans le domaine de Laplace.

Identification du système

Question 7.2. On observe sur la caractéristique temporelle, une tangente à l'origine horizontale (de pente nulle) et aucun dépassement. Le modèle le plus simple correspond à la réponse d'un second ordre sur-amorti (régime apériodique, avec $\xi > 1$), d'où la fonction de transfert proposée.

Question 7.3. Après avoir tracé l'asymptote finale permettant de trouver

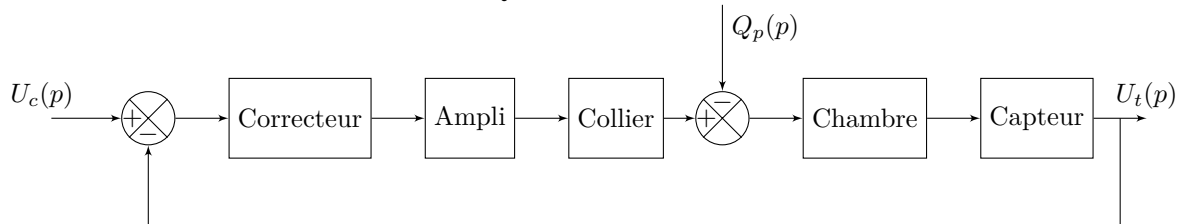
$$U_0G = 5,0 \text{ V} \implies \boxed{G = 0,5 \text{ (sans unité)}}$$

et tracé la tangente au point d'inflexion, on trouve approximativement

$$\boxed{\tau_1 = 5 \text{ s}} \quad \text{et} \quad \tau_1 + \tau_2 = 120 \text{ s} \implies \boxed{\tau_2 = 115 \text{ s}}$$

Analyse des performances

Question 7.4.



Question 7.5. Dans le cas particulier d'un retour unitaire, la chaîne directe et la FTBO sont confondues. Il vient alors par formule de Black et simplification du type « $\frac{N/D}{1+N/D} = \frac{N}{N+D}$ » :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{0,5}{0,5 + (1 + 5p)(1 + 100p)} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{105}{1,5}p + \frac{500}{1,5}p^2}$$

En réalisant les A.N. on trouve :

$$K = 0,3\bar{3} \text{ (-)}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1,5}{500}} = \sqrt{30 \times 10^{-4}} \approx 5,5 \times 10^{-2} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

et

$$\xi = \frac{105\omega_0}{3} \approx \frac{5,775}{3} = \frac{6,0 - 0,225}{3} = 2 - 0,075 = 1,925 > 1$$

Avec l'abaque de temps de réponse réduit, on trouve avec $\xi \approx 2$ la valeur $\omega_0 T_r \approx 10,5$.
D'où

$$T_r \approx \frac{10,5}{5,5 \times 10^{-2}} \approx 19 \text{ ms}$$

Question 7.6. La FTBO est de classe 0 donc l'erreur statique relative de position vaut

$$\varepsilon_s\% = \frac{1}{1 + K_{BO}} = \frac{1}{1 + 0,5} = \frac{2}{3} = 66\% \gg \frac{0,5}{37 - 15} \approx 2,3\%$$

Question 7.7. Le critère de précision du cahier des charges ($\pm 0,5^\circ$) n'est pas respecté pour l'échelon d'amplitude la plus importante (montée en température de 15°C à 37°C); donc le cahier des charges n'est pas respecté.

Amélioration des performances

Question 7.8. Avec $C(p) = K$, la BO devient

$$\text{FTBO}(p) = \frac{0,5K}{(1 + 5p)(1 + 100p)}$$

telle que, toujours avec un retour unitaire, la BF soit maintenant

$$\text{FTBF}(p) = \frac{0,5K}{0,5K + (1 + 5p)(1 + 100p)} = \frac{\frac{0,5K}{1 + 0,5K}}{1 + \frac{105}{1 + 0,5K}p + \frac{500}{1 + 0,5K}p^2}$$

Pour avoir la réponse la plus rapide sans dépassement, il faut que la fonction de transfert ait un coefficient d'amortissement

$$\xi = \frac{105}{2\sqrt{500(1 + 0,5K)}} = 1 \iff K = 2 \left[\frac{1}{500} \left(\frac{105}{2} \right)^2 - 1 \right]$$

D'où, par calcul élémentaire,

$$K = \frac{(100 + 5)^2}{1000} - 2 = \frac{10^4 + 10^3 + 25 - 2 \times 10^3}{1000} = \frac{10^4 - 10^3 + 25}{1000} \implies \boxed{K = 9,025}$$

Question 7.9. Avec $\xi = 1$, il vient le temps de réponse réduit $\omega_0 T_r = 4,8$. Avec $K = 9,025$, il vient

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1 + 0,5K}{500}} = \frac{105}{1000} = 0,105 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

d'où

$$T_r = \frac{4,8}{0,105} = \frac{40 \times 0,105 + 0,6}{0,105} \approx 46 \text{ s} \ll 2 \text{ min}$$

L'erreur statique relative de position vaut maintenant

$$\varepsilon_s\% = \frac{1}{1 + 0,5K} = \frac{1}{1 + 0,5 \times 9,025} \approx 18\%$$

Question 7.10. Avec ce nouveau correcteur, la BO est de classe 1 donc le système est précis vis-à-vis de la consigne. De plus, comme l'action intégrale est située en amont de la perturbation, le système est aussi robuste ; ce qui valide le cahier des charges.

Bras de robot à muscles artificiels

Question 8.1. Par transformée de Laplace des équations, il vient :

$$\begin{aligned} C_m(p) - C_{\text{ext}}(p) &= I_e (p^2 \Theta(p) - p\theta(0) - \dot{\theta}(0)) \\ C_m &= K_1 [P_1(p) - P_2(p)] - (K_2 + K_3 p) \Theta(p) + K_3 \theta(0) \end{aligned}$$

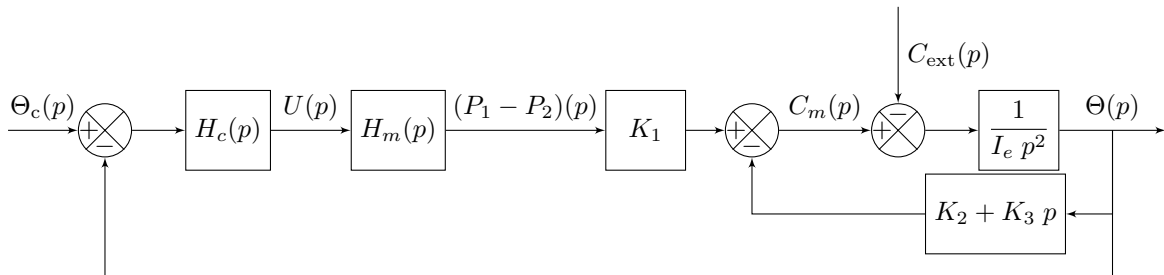
Pour que les conditions initiales soient nulles, il suffit d'avoir

$$\theta(0) = 0 \text{ rad} \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(0) = 0 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Avec ces conditions, il vient :

$$\begin{aligned} C_m(p) - C_{\text{ext}}(p) &= I_e p^2 \Theta(p) \\ C_m &= K_1 [P_1(p) - P_2(p)] - (K_2 + K_3 p) \Theta(p) \end{aligned}$$

Question 8.2. D'après les données de l'énoncé et faisant attention que $C_m(p)$ est forcément une variable d'entrée, il vient le schéma-blocs :



Question 8.3. On remarque une réponse avec une tangente initiale horizontale et aucun dépassement caractéristique d'un système d'ordre supérieur ou égal à 2 sur-amorti. Le modèle le plus simple que l'on puisse considérer est un modèle d'ordre 2 sur-amorti de la forme

$$H_m(p) = \frac{K_m}{(1 + \tau_m p)(1 + \tau_2 p)}, \quad \tau_2 < \tau_m$$

En traçant la tangente au point d'inflexion, on trouve par intersection avec l'axe des abscisses $\tau_2 \approx 2 \text{ ms}$ et par intersection avec l'asymptote finale d'équation $[P_1 - P_2]_\infty = 0,5 \text{ bar} = 5 \times 10^4 \text{ Pa}$ la somme $\tau_m + \tau_2 = 35 \text{ ms}$ d'où

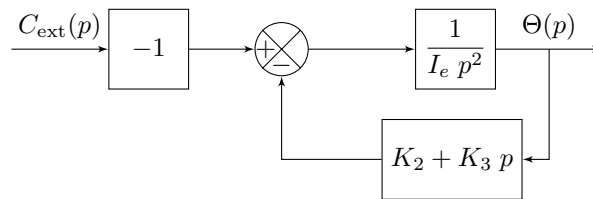
$$\tau_m = 33 \text{ ms} \gg \tau_2$$

et donc le choix d'un modèle du premier ordre de gain

$$K_m = \frac{[P_1 - P_2]_\infty}{U_0} = 5 \times 10^4 \text{ Pa}\cdot\text{V}^{-1}$$

Analyse du comportement naturel de l'actionneur

Question 8.4. Avec $P_1 - P_2 = 0$, il vient le schéma-blocs :



tel que, par formule de Black, on trouve directement :

$$H_n(p) = \frac{\frac{-1}{I_e p^2}}{\frac{K_2 + K_3 p}{I_e p^2}} = \frac{\frac{-1}{K_2}}{1 + \frac{K_3}{K_2} p + \frac{I_e}{K_2} p^2}$$

qui est une fonction de transfert du second ordre de la forme $\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec

$$K = \frac{-1}{K_2} = -0,04 \text{ N}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K_2}{I_e}} = \sqrt{\frac{25}{0,5}} \approx 7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

et

$$\xi = \frac{K_3 \omega_0}{2K_2} = \frac{2,8 \times 7}{2 \times 25} \approx \frac{2,8}{7} = \frac{7 \times 0,4}{7} = 0,4 \text{ (-)}$$

Question 8.5. Avec un échelon de 2 Nm , on trouve par théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 2K = -0,08 \text{ N}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

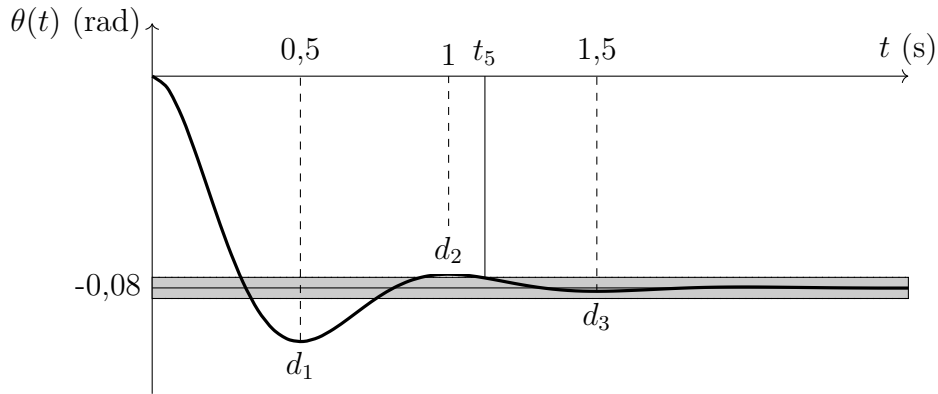
Avec $\xi = 0,4$, on trouve avec l'abaque des dépassements :

$$D_{1\%} = 25 \%, \quad D_{2\%} = 6,4 \% \quad \text{et} \quad D_{3\%} = 1,6 \%$$

Ces dépassements ont lieu tous les

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi}{7 \sqrt{1 - 0,4^2}} = \frac{\pi}{7 \sqrt{0,84}} \approx \frac{3(1 + \dots)}{7 \times 0,9} = \frac{1 + \dots}{2,1} \approx 0,5 \text{ s}$$

Graduant ainsi l'axe des abscisses par pas de $t_1 = 0,5 \text{ s}$, positionnant la valeur finale et les dépassements, alternativement en dessous (impairs) et au-dessus (pairs) de l'asymptote finale, il vient le tracé suivant.



Avec l'abaque donnant le temps de réponse réduit en fonction de $\xi = 0,4$, on trouve $\omega_0 t_r = 8$ d'où

$$t_r = \frac{8}{7} \approx 1,1 \text{ s}$$

Performances en commande proportionnelle

Question 8.6. Par lecture directe, il vient

$$\Theta(p) = [\varepsilon(p)kH_1(p) - C_{\text{ext}}(p)] H_2(p)$$

d'où

$$\varepsilon(p) = \Theta^*(p) - \Theta(p) = \Theta^*(p) - [\varepsilon(p)kH_1(p) - C_{\text{ext}}(p)] H_2(p) \iff \varepsilon(p) = \frac{\Theta^*(p) + H_2(p)C_{\text{ext}}(p)}{1 + kH_1(p)H_2(p)}$$

Question 8.7. Par théorème de la valeur finale, il vient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\theta_0 + H_2(p)C_0}{1 + kH_1(p)H_2(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\theta_0 + \frac{0,04C_0}{1 + 0,112p + 0,02p^2}}{1 + \frac{0,4k}{(1 + 0,025p)(1 + 0,112p + 0,02p^2)}}$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \frac{\theta_0 + 0,04C_0}{1 + 0,4k}$$

Question 8.8. Par lecture graphique, il vient :

	$k = 0,5$	$k = 1$	$k = 2,5$
$D_{1\%}$	$\frac{0,225 - 0,175}{0,175} = 29 \%$	$\frac{0,38 - 0,28}{0,28} = 36 \%$	$\frac{0,74 - 0,5}{0,5} = 48 \%$
$T_{r,5\%}$	1,125 s	1 s	1,275 s

Dans les trois cas, l'exigence de dépassement n'est pas respectée. Le correcteur proportionnel ne permet donc pas de respecter le cahier des charges.

Correction PI

Question 8.9. Par cours on sait que l'ajout d'une action intégrale dans la BO permet d'annuler l'erreur de poursuite et comme cette action intégrale est située en amont de la perturbation, elle permet aussi de rendre le système robuste.

Question 8.10. Par lecture graphique, il vient :

	$k = 0,4$	$k = 0,6$	$k = 0,8$	$k = 1$
$D_{\% \max} < 20 \%$	0 %	0 %	9 %	21 %
$T_{r,5\%} < 1,5 \text{ s}$	1,875 s	1,275 s	1,875 s	2,25 s

Seule la valeur $K_c = 0,6$ convient.

Commande de pales d'hélicoptères

Étude de la servocommande

Établissement de la fonction de transfert de la servocommande

Question 9.1. Par transformée de Laplace en supposant nulles les conditions initiales, il vient :

— équation de débit :

$$K_d(Z_e(p) - Z_s(p)) = SpZ_s(p) + \frac{V_t p}{2B}(P_a(p) - P_b(p))$$

— équation dynamique appliquée au corps de vérin :

$$S(P_a(p) - P_b(p)) = [r_c + fp + mp^2] Z_s(p)$$

Question 9.2. Par analyse dimensionnelle, on a :

$$[K_d z_s(t)] = \left[S \frac{dz_s}{dt}(t) \right] \iff [K_d] = \frac{\left[S \frac{dz_s}{dt}(t) \right]}{[z_s(t)]} = \frac{\text{m}^2 \times \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{m}} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

et

$$\left[\frac{V_t dp_a}{B dt}(t) \right] = \left[S \frac{dz_s}{dt}(t) \right] \iff \left[\frac{V_t}{B} p_a(t) \right] = [S z_s(t)] \iff [B] = \left[\frac{V_t p_a(t)}{S z_s(t)} \right] = \frac{\text{m}^3 \times \text{Pa}}{\text{m}^2 \times \text{m}} = \text{Pa}$$

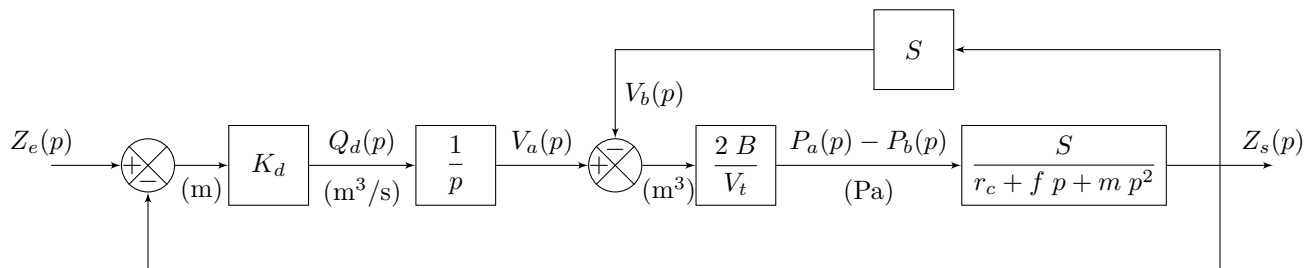
Question 9.3. Avec les équations données mises sous la forme :

$$\left[(Z_e(p) - Z_s(p)) \boxed{K_d} \times \frac{1}{p} - \boxed{S} Z_s(p) \right] \times \frac{2B}{V_t} = P_a(p) - P_b(p)$$

et

$$(P_a(p) - P_b(p)) \times \frac{S}{r_c + fp + mp^2} = Z_s(p)$$

il vient le schéma-blocs :



Question 9.4. On s'intéresse à la partie encadrée. Par formule de Black, il vient :

$$T(p) = \frac{Z_s(p)}{V_a(p)} = \frac{\frac{2BS}{V_t(r_c + fp + mp^2)}}{1 + \frac{2BS^2}{V_t(r_c + fp + mp^2)}} = \frac{2BS}{2BS^2 + V_t(r_c + fp + mp^2)}$$

soit, sous forme canonique :

$$T(p) = \frac{\frac{2BS}{2BS^2 + V_t r_c}}{1 + \frac{fV_t}{2BS^2 + V_t r_c} p + \frac{mV_t}{2BS^2 + V_t r_c} p^2}$$

Question 9.5. Par définition, on a :

$$H_{BO}(p) = \frac{K_d}{p} T(p) = \frac{\frac{2BSK_d}{2BS^2 + V_t r_c}}{p \left(1 + \frac{fV_t}{2BS^2 + V_t r_c} p + \frac{mV_t}{2BS^2 + V_t r_c} p^2 \right)}$$

Avec

$$2BSK_d = \frac{2BS^2}{V_t} \times \frac{K_d}{S} \times V_t = r_h \omega V_t \quad \text{et} \quad 2BS^2 + V_t r_c = \left(\frac{2BS^2}{V_t} + r_c \right) V_t = (r_h + r_c) V_t$$

il vient :

$$H_{BO}(p) = \frac{\frac{r_h \omega}{r_h + r_c}}{p \left(1 + \frac{f}{r_h + r_c} p + \frac{m}{r_h + r_c} p^2 \right)}$$

qui est de la forme $\frac{A}{p(Bp^2 + Cp + 1)}$ avec

$$A = \frac{r_h \omega}{r_h + r_c} = \frac{2 \times 10^7 \times 200}{2 \times 2 \times 10^7} = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$B = \frac{m}{r_h + r_c} = \frac{250}{2 \times 2 \times 10^7} = 6,25 \times 10^{-6} \text{ s}^2$$

$$C = \frac{f}{r_h + r_c} = \frac{1 \times 10^5}{2 \times 2 \times 10^7} = 2,5 \times 10^{-3} \text{ s}$$

Question 9.6. Au delà d'une phase transitoire d'une durée approximative de 0,01 s, les deux réponses sont superposées ; ce qui signifie qu'au temps long les deux modèles sont équivalents. La seule différence observable est donc pour $t \in [0; 0,01 \text{ s}]$. Si le modèle de la BO utilisé n'a pas pour vocation à décrire les premiers instants mais plutôt le régime stabilisé, alors le modèle le plus simple (du premier ordre intégré) suffit. Pour avoir

$$H_{BO}(p) = \frac{A}{p(Bp^2 + Cp + 1)} \approx \frac{A}{p(Cp + 1)}$$

il suffit que B tende vers 0, ce qui se traduit par

$$\xi = \frac{C}{2\sqrt{B}} \gg 1$$

ce qui n'est pas le cas ici car

$$\xi = \frac{C}{2\sqrt{B}} = \frac{2,5 \times 10^{-3}}{2\sqrt{6,25 \times 10^{-6}}} = 0,5 < 1$$

(...)

Question 9.7. La fonction de transfert $H_{BO}(p)$ retenue est un premier ordre intégré de gain $A = 100 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et de constante de temps $C = 2,5 \text{ ms}$. Elle est donc d'ordre 2 et de classe 1.

Question 9.8. Avec un retour unitaire, la chaîne directe et la BO coïncident et par formule de Black il vient :

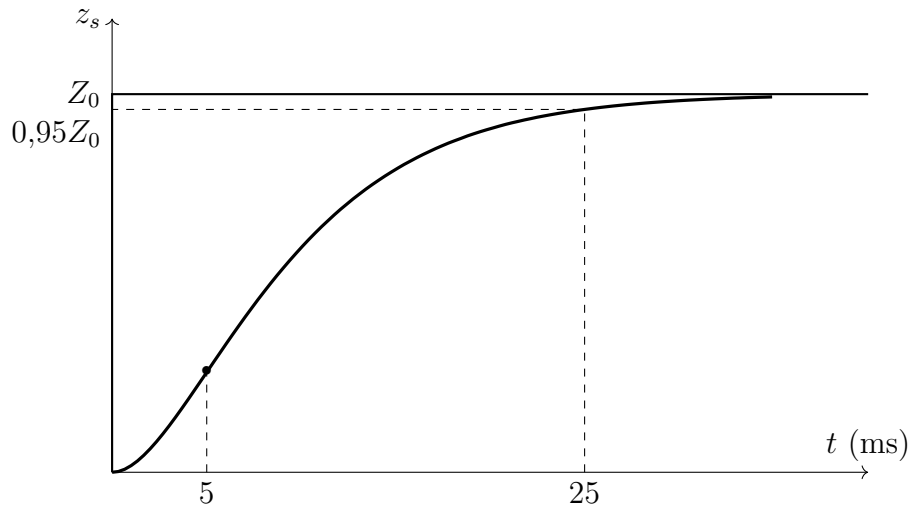
$$H_{BF}(p) = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{\frac{A}{p(1 + Cp)}}{1 + \frac{A}{p(1 + Cp)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{A}p + \frac{C}{A}p^2}$$

qui est de la forme $\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec

$$\begin{cases} K &= 1 \text{ (-)} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{A}{C}} = \sqrt{\frac{100}{25 \times 10^{-4}}} = 200 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \\ \xi &= \frac{\omega_0}{2A} = \frac{200}{2 \times 100} = 1 \text{ (-)} \end{cases}$$

Vérification du cahier des charges de la servocommande

Question 9.9. Avec la valeur de $\xi = 1$, il est attendu le tracé de la réponse indicielle d'un second ordre en régime (apériodique) critique. La réponse présente donc une tangente initiale horizontale, une asymptote finale horizontale en $100Z_0$ et un point d'inflexion à l'instant $t = \frac{1}{\omega_0} = 5 \text{ ms}$. Le tracé est donné ci-dessous.



Question 9.10. Avec une BO de classe 1, on trouve que l'erreur est nulle et donc la réponse précise. Donc le critère de précision est vérifié.

Question 9.11. Avec $\xi = 1$ (en BF), la réponse du système ne présente pas de dépassement. Donc le critère de dépassement de consigne du cahier des charges est vérifié.

Question 9.12. Avec l'abaque de temps de réponse réduit, on trouve pour $\xi = 1 \implies \omega_0 T_r \approx 5$, d'où, avec $\omega_0 = 200 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, un temps de réponse

$$T_r = 25 \text{ ms} < 50 \text{ ms}$$

Donc le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

Amélioration des performances de l'asservissement

Question 9.13. D'après le tracé de la réponse et de la bande à $\pm 5\%$, on trouve un temps de réponse

$$T_r = 13 \text{ ms} < 50 \text{ ms}$$

Donc le critère de rapidité du cahier des charges est toujours vérifié.

Question 9.14. On note un pic d'amplitude maximale de 1,36 d'où un dépassement relatif maximal de

$$D_{1\%} = 36\% > 5\%$$

Donc le critère de dépassement de consigne du cahier des charges n'est plus respecté.

Question 9.15. On observe ici que la sortie converge vers une valeur finale donc le critère de stabilité du cahier des charges est respecté.

Par ailleurs, comme l'asymptote finale horizontale est en $z_s/z_0 = 1$ alors l'erreur statique est nulle; donc le critère de précision est vérifié.

Question 9.16. Toujours avec un retour unitaire, la chaîne directe et la BO coïncident et par formule de Black il vient :

$$H_{BF2}(p) = \frac{H_{BO2}(p)}{1 + H_{BO2}(p)} = \frac{\frac{2 \times 10^5}{p^2 + 901p + 2 \times 10^5}}{1 + \frac{2 \times 10^5}{p^2 + 901p + 2 \times 10^5}} = \frac{2 \times 10^5}{p^2 + 901p + 4 \times 10^5}$$

soit sous forme canonique

$$H_{BF2}(p) = \frac{1}{1 + \frac{901}{4 \times 10^5}p + \frac{1}{4 \times 10^5}p^2}$$

qui est de la forme $\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec

$$\begin{cases} K &= 0,5 \text{ (-)} \\ \omega_0 &= \sqrt{40 \times 10^4} \approx 630 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \\ \xi &= \frac{901\omega_0}{2 \times 4 \times 10^5} = 0,71 \text{ (-)} \end{cases}$$

Question 9.17. Avec $\xi = 0,71$, on trouve avec l'abaque des dépassements $D_{1\%} \approx 5 \%$, tout en sachant $D_{1\%} < 5 \%$ car $\xi > 0,69$ (...) mais avec

$$D_{1\%} = \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \approx 4,2 \% < 5 \%$$

Donc le critère de dépassement du cahier des charges est maintenant respecté.

Question 9.18. Pour $\xi = 0,71$, l'abaque de temps de réponse réduit donne $\omega_0 T_r = 3$. Sachant $\omega_0 \approx 630 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, il vient

$$T_r = 4,7 \text{ ms} < 50 \text{ ms}$$

Donc le critère de rapidité du cahier des charges est vérifié.

Robot pour la chirurgie endoscopique

Étude de l'asservissement de la position angulaire du moteur

Vérification de la vitesse de rotation maximale du moto-réducteur

Question 10.1. Compte tenu du schéma cinématique minimal proposé, il est possible de déterminer la vitesse de translation du coulisseau de la façon suivante :

$$V_{nom} = N_{nom} \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot \frac{\Phi_1}{2} = 60 \times \frac{2\pi}{60} \times \frac{38,4 \times 10^{-3}}{2} = 38,4 \times 10^{-3} \pi = 0,12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

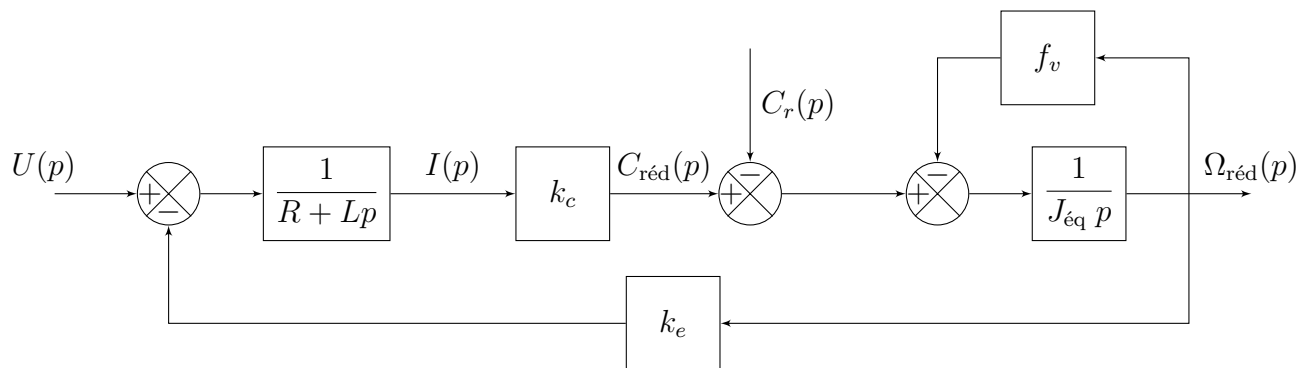
Cette valeur est conforme au cahier des charges qui impose une vitesse de translation supérieure à $0,1 \text{ ms}^{-1}$.

Évaluation de la fonction de transfert du moto-réducteur

Question 10.2. Les transformées de Laplace des quatre équations de fonctionnement du moteur en charge, en condition de Heaviside, sont :

$$\begin{aligned} U(p) &= E(p) + (R + Lp)I(p) \\ C_{\text{réd}}(p) - C_r(p) &= (f_v + J_{\text{éq}}p) \Omega_{\text{réd}}(p) \\ E(p) &= k_e \Omega_{\text{réd}}(p) \\ C_{\text{réd}}(p) &= k_c I(p) \end{aligned}$$

Avec ces équations, il vient le schéma-blocs :



Question 10.3. Par théorème de superposition (afin d'annihiler l'entrée $C_r(p)$), après réarrangement du schéma-blocs afin d'avoir $\frac{\Omega_{\text{réd}}(p)}{C_{\text{réd}}(p) - C_r(p)} = \frac{1}{f_v + J_{\text{éq}}p}$ et enfin par

formule de Black, il vient :

$$M(p) = \frac{\frac{k_c}{(R+Lp)(f_v + J_{\text{éq}}p)}}{1 + \frac{k_e k_c}{(R+Lp)(f_v + J_{\text{éq}}p)}} = \frac{\frac{k_c}{k_e k_c + Rf_v}}{1 + \frac{RJ_{\text{éq}} + Lf_v}{k_e k_c + Rf_v}p + \frac{LJ_{\text{éq}}}{k_e k_c + Rf_v}p^2}$$

C'est une fonction de transfert du second ordre.

Question 10.4. On remarque une réponse avec une tangente initiale horizontale et aucun dépassement caractéristique d'un système d'ordre supérieur ou égal à 2 sur-amorti. Le modèle le plus simple que l'on puisse considérer est un modèle d'ordre 2 sur-amorti de la forme

$$M(p) = \frac{K_m}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}, \quad \tau_2 < \tau_1$$

En traçant la tangente au point d'inflexion, on trouve par intersection avec l'axe des abscisses $\tau_2 \approx 1$ ms et par intersection avec l'asymptote finale d'équation

$$\omega_\infty = \frac{1,75}{0,166} = 10,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

la somme $\tau_1 + \tau_2 = 16$ ms d'où

$$\tau_1 = 15 \text{ ms} \gg \tau_2$$

et donc le choix d'un modèle du premier ordre de gain

$$K_m = \frac{\omega_\infty}{U_0} = \frac{10,5}{24} = 0,439 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{V}^{-1}$$

De façon pratique, $M(p)$ devient une fonction du premier ordre si

$$\frac{LJ_{\text{éq}}}{k_e k_c + Rf_v} = 0 \iff L = 0 \text{ ou } J_{\text{éq}} = 0$$

Donc en fixant $\frac{L}{R} \rightarrow 0$ — sachant $\frac{J_{\text{éq}}}{R} \gg \frac{L}{R}$ — la BO devient

$$\frac{k_e k_c}{(R+Lp)(f_v + J_{\text{éq}}p)} = \frac{k_e k_c}{Rf_v \left(1 + \frac{L}{R}p\right) \left(1 + \frac{J_{\text{éq}}}{f_v}p\right)} \xrightarrow{L/R \rightarrow 0} \frac{k_e k_c}{Rf_v \left(1 + \frac{J_{\text{éq}}}{f_v}p\right)}$$

telle que

$$M(p) = \frac{\frac{k_c}{Rf_v \left(1 + \frac{J_{\text{éq}}}{f_v}p\right)}}{1 + \frac{k_e k_c}{Rf_v \left(1 + \frac{J_{\text{éq}}}{f_v}p\right)}} = \frac{\frac{k_c}{k_e k_c + Rf_v}}{1 + \frac{RJ_{\text{éq}}}{k_e k_c + Rf_v}p}$$

qui est bien une fonction du premier ordre.

Question 10.5. Avec la simplification proposée, on a :

$$M_2(p) = \frac{\frac{k_c}{k_e k_c + R f_v}}{1 + \frac{R J_{\text{éq}}}{k_e k_c + R f_v} p}$$

qui est une fonction de transfert de la forme $\frac{G_s}{1 + T p}$ avec

$$G = \frac{k_c}{k_e k_c + R f_v} = \frac{2,1}{2,1^2 + 10 \times 0,04} = 0,43 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$$

et

$$T = \frac{R J_{\text{éq}}}{k_e k_c + R f_v} = \frac{10 \times 7 \times 10^{-3}}{2,1^2 + 10 \times 0,04} = 14,5 \text{ ms}$$

Question 10.6. Voir la réponse à la question 10.4.

Les valeurs coïncident avec celle calculées pour $M_2(p)$.

Question 10.7. Le bloc $B(p)$ converti une vitesse de rotation en position angulaire ; c'est donc un intégrateur

$$\boxed{B(p) = \frac{1}{p}}$$

Le codeur a une résolution de 360 incréments par tour, ce qui correspond à une résolution de $\frac{360}{2\pi}$ inc/rad. Sachant que le codeur est placé sur l'axe moteur alors il lie la position $\Theta_m(p)$ à son image par la fonction de transfert

$$\Theta_m(p) \xrightarrow{\quad} \boxed{\frac{360}{2\pi}} \xrightarrow{\quad} I_\theta(p)$$

Or comme on a

$$\Theta(p) = \frac{1}{50} \Theta_m(p) \iff \Theta_m(p) = 50 \Theta(p)$$

alors il vient

$$\Theta(p) \xrightarrow{\quad} \boxed{50} \xrightarrow{\quad} \Theta_m(p) \xrightarrow{\quad} \boxed{\frac{360}{2\pi}} \xrightarrow{\quad} I_\theta(p)$$

tel que, par identification, on trouve

$$C = \frac{360 \times 50}{2\pi} = 2\,865 \text{ inc} \cdot \text{rad}^{-1}$$

Par simple produit, on trouve un expression de la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$H_{\text{BO}}(p) = K \cdot \frac{0,436}{1 + 14,5 \times 10^{-3} p} \cdot \frac{1}{p} \cdot 2865 \quad \text{d'où} \quad \boxed{H_{\text{BO}}(p) = \frac{1\,249K}{p(1 + 14,5 \times 10^{-3} p)}}$$

Étude de la précision de la boucle d'asservissement de position angulaire

Question 10.8. Comme la BO est de classe 1, l'écart statique de position est nulle.

Question 10.9. Comme la BO est de classe 1 mais que l'action intégrale se situe en aval de la perturbation, l'écart statique de position induite par un échelon de perturbation n'est pas nul. Par théorème de superposition (afin d'annihiler l'entrée $U(p)$), après réarrangement du schéma-blocs afin d'avoir $\frac{\Omega_{\text{réd}}(p)}{C_{\text{réd}}(p) - C_r(p)} = \frac{1}{f_v + J_{\text{éq}}p}$ et enfin par formule de Black, il vient :

$$\frac{\Omega_{\text{réd}}(p)}{C_r(p)} = \frac{-1}{p(f_v + J_{\text{éq}}p)} = \frac{-R}{\frac{Kk_e k_c C}{1 + \frac{Rf_v}{Kk_e k_c C}p + \frac{RJ_{\text{éq}}}{Kk_e k_c C}p^2}}$$

Sachant $\varepsilon(p) = -C\Omega_{\text{réd}}(p)$, il vient alors par théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \times \frac{\frac{R}{Kk_e k_c C}}{1 + \frac{Rf_v}{Kk_e k_c C}p + \frac{RJ_{\text{éq}}}{Kk_e k_c C}p^2} \times \frac{C_r}{p} = \frac{RC_r}{Kk_e k_c}$$

d'où

$$\varepsilon_{\text{pert},\infty} = \frac{RC_r}{Kk_e k_c} = \frac{10 \times 0,2}{0,08 \times 2,1^2} = 5,6 \text{ inc}$$

Question 10.10. D'après la question précédente, on a un écart induit par le couple résistant de 5,6 inc. Sachant qu'à 150 inc correspond 1 mm, on en déduit que l'écart de position de la crémaillère est de

$$\varepsilon_{\text{crémaillère}} = \varepsilon_{\text{pert},\infty} \times \frac{1}{150} = \frac{5,6}{150} \approx 37,7 \times 10^{-3} \text{ mm} \ll 0,2 \text{ mm}$$

Donc le cahier des charges est respecté.

Pour annuler cet écart, il faut ajouter une action intégrale dans le bloc K (du correcteur) en veillant toutefois à la stabilité du système, car la BO est dans ce cas de classe 2.

Vérification des performances de la chaîne de positionnement de l'instrument

Analyse du déplacement en translation de la crémaillère

Question 10.11. Le bloc H_2 correspond à la transformation de mouvement. Sa valeur correspond à rayon de la roue dentée $3'$; soit :

$$H_2 = \frac{\Phi_1}{2} = 19,2 \text{ mm}$$

Question 10.12. Pour que la réponse du système soit conforme à la consigne, il faut que le gain de la chaîne fonctionnelle soit unitaire tel que l'erreur statique de position soit nulle ; ce qui se traduit par

$$P = C_1 \cdot K_{H_1} \cdot H_2 = 35 \times 10^{-5} \times 19,2 \times 10^{-3} C_1 = 1 \iff \boxed{C_1 = 148\,810 \text{ inc} \cdot \text{m}^{-1}}$$

Question 10.13. Pour que la crémaillère se déplace 10 fois moins que la main du chirurgien, il suffit que le gain de la chaîne fonctionnelle vaille

$$P = C_1 \cdot K_{H_1} \cdot H_2 = 35 \times 10^{-5} \times 19,2 \times 10^{-3} C_1 = \frac{1}{10} \iff \boxed{C_1 = 14\,881 \text{ inc} \cdot \text{m}^{-1}}$$

Analyse du déplacement de l'instrument chirurgical par rapport à la crémaillère

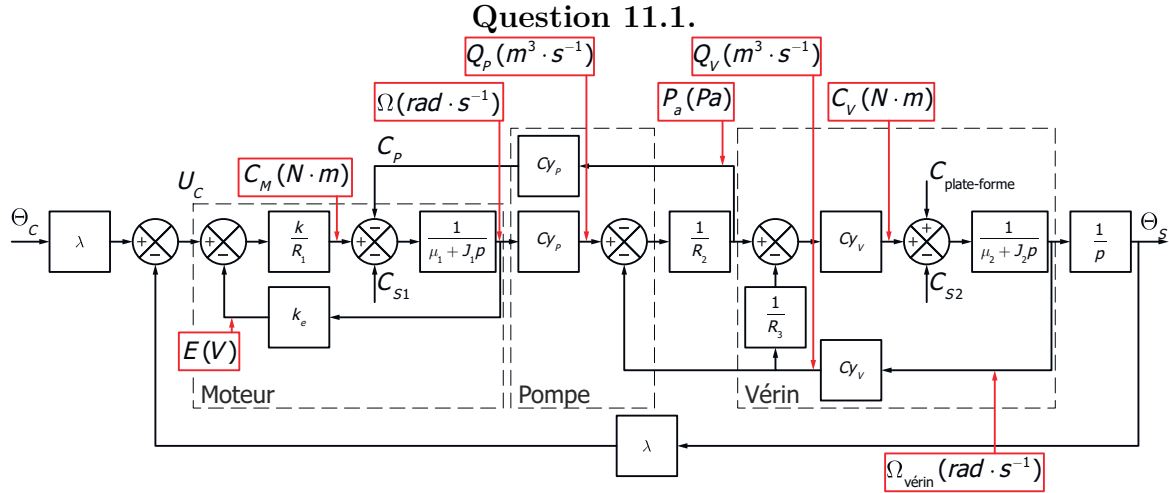
Question 10.14. On identifie sur le tracé une asymptote finale horizontale pour le déplacement à 20 mm pour une consigne de 20 mm, donc le gain de $H_3(p)$ est $\boxed{K = 1 (-)}$. La position maximale atteinte, en premier dépassement, est de 31 mm, ce qui correspond à un dépassement relatif

$$D_{1\%} = \frac{31 - 20}{20} = 55 \%$$

Avec cette valeur, on identifie sur l'abaque des dépassements relatifs un coefficient d'amortissement $\boxed{\xi = 0,17}$. Avec cette valeur de ξ , on trouve sur l'abaque de temps de réponse réduit $\omega_0 T_r = 17$. Après avoir identifié le temps de réponse à $T_r = 0,55 \text{ s}$, on en déduit par quotient la pulsation propre du système non amorti $\boxed{\omega_0 \approx 31 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$. Avec les valeurs des trois constantes caractéristiques, il vient l'expression numérique de la fonction de transfert identifiée :

$$\boxed{H_3(p) = \frac{1}{1 + 12,5 \times 10^{-3} p + 1,34 \times 10^{-3} p^2}}$$

Échelle E.P.A.S. de pompier



Question 11.1. Donner l'unité de la grandeur k_e .

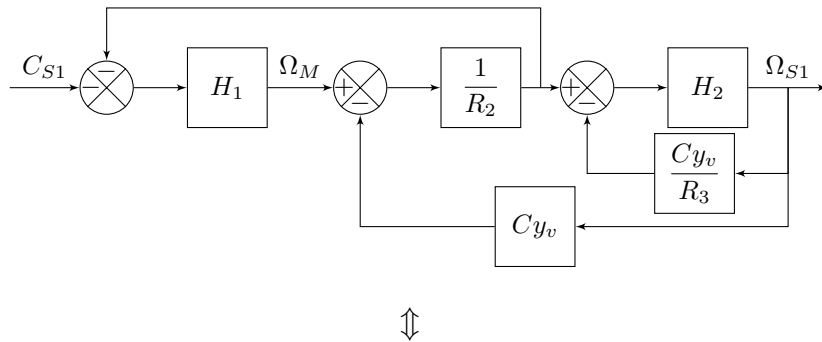
Question 11.2. k_e est la constante de force électromotrice qui permet de « convertir » une vitesse de rotation (en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) en une tension (en V). Son unité est donc

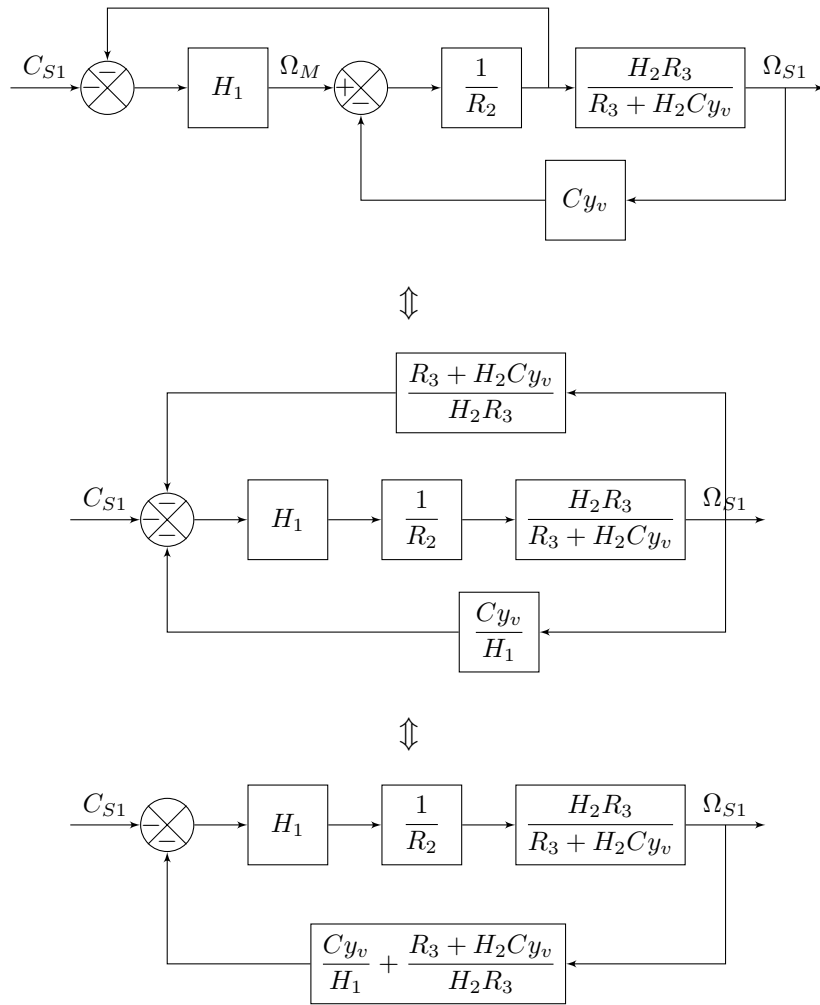
$$[k_e] = \text{V} \cdot \text{s}$$

Question 11.3. Avec ces hypothèses, il vient par formule de Black :

$$H_1(1) = \frac{\Omega_M(p)}{C_{S1}(p) + C_P(p)} = \frac{-1}{1 + \frac{\mu_1 + J_1 p}{k k_e}} \quad \text{d'où} \quad H_1(p) = \frac{-R}{1 + \frac{k k_e + R_1 \mu_1}{R_1 J_1} p}$$

Question 11.4. Avec quelques modifications du schéma-blocs





par « simple » formule de Black, il vient :

$$\begin{aligned}
 F_1(p) &= \frac{-\frac{H_1 H_2 R_3}{R_2 R_3 + H_2 C y_v R_2}}{1 + \frac{H_1 H_2 R_3}{R_2 R_3 + H_2 C y_v R_2} \left(\frac{C y_v}{H_1} + \frac{R_3 + H_2 C y_v}{H_2 R_3} \right)} \\
 &= \frac{H_1 H_2 R_3}{R_2 R_3 + H_2 C y_v R_2 + H_2 R_3 C y_v + H_1 R_3 + H_1 H_2 C y_v}
 \end{aligned}$$

Il vient finalement après factorisation :

$$\boxed{F_1(p) = \frac{-H_1 H_2 R_3}{R_3 (H_1 + R_2) + H_2 C y_v (H_1 + R_2 + R_3)}}$$

Question 11.5. On identifie sur la courbe un retard de $\tau_R = 0,5$ s.

Sans prendre en compte ce retard, la courbe obtenue est représentative du comportement d'un système d'ordre 2 sous-amorti puisqu'elle possède des dépassements. La valeur finale correspond à la valeur de consigne donc le gain vaut $K = 1 (-)$. Le premier dépassement

relatif vaut $D_{1\%} = 20\%$, on identifie le coefficient d'amortissement $\xi = 0,5$. Avec ce coefficient d'amortissement, on trouve un temps de réponse réduit $\omega_0 T_r = 5$. Avec un temps de réponse $T_R \approx 3,5$ s, on en déduit par quotient la pulsation propre du système non amorti $\omega_0 \approx 1,4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Avec les valeurs des trois constantes caractéristiques, il vient l'expression numérique de la fonction de transfert identifiée :

$$G(p) = \frac{1}{1 + 0,71p + 0,51p^2}$$

Question 11.6. Sans prendre en compte le retard, on sait que dans le cas particulier d'un retour unitaire on a :

$$H_{\text{BF}} = \frac{H_{\text{BO}}}{1 + H_{\text{BO}}} \iff H_{\text{BO}} = \frac{H_{\text{BF}}}{1 - H_{\text{BF}}}$$

Avec $H_{\text{BG}}(p) = G(p)$ il vient

$$H_{\text{BO}}(p) = \frac{1}{p(0,71 + 0,51p)}$$

C'est une fonction de transfert de classe 1 (et d'ordre 2 caractéristique d'un premier ordre intégré) donc l'erreur statique de position est nulle.

Question 11.7. Sans prendre en compte le retard, il vient par formule de Black :

$$G_2(p) = \frac{K_c H_{\text{BO}}(p)}{1 + K_c H_{\text{BO}}(p)}$$

Pour prendre en compte le retard, il suffit d'utiliser le théorème du retard. Notant g_{2R} la fonction retardée de τ_R par rapport g_2 , il vient par transformée de Laplace

$$\mathcal{L}[g_{2R}](p) = \mathcal{L}[g_2](p) \cdot e^{-\tau_R p} \iff G_{2R}(p) = G_2(p) \cdot e^{-\tau_R p}$$

d'où :

$$G_{2R}(p) = \frac{K_c H_{\text{BO}}(p)}{1 + K_c H_{\text{BO}}(p)} \cdot e^{-\tau_R p}$$

Question 11.8. Avec

$$H_{\text{BO}}(p) = \frac{4}{p(1,62 + p)}$$

il vient

$$H_{\text{BF}} = \frac{1}{1 + \frac{0,405}{K_c}p + \frac{0,25}{K_c}p^2}$$

Pour que le système soit le plus rapide sans dépassement visible, c'est-à-dire tous inférieurs à 5 %, il faut que le coefficient d'amortissement vaille

$$\xi = \frac{0,405\omega_0}{2K_c} = \frac{0,405}{\sqrt{K_c}} = 0,69 \iff K_c = \left(\frac{0,405}{0,69}\right)^2 = 0,34$$

Avec cette valeur, il vient

$$\omega_0 = 2\sqrt{K_c} = 1,17 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Question 11.9. Comme la BO est de classe 1 et de gain

$$K_{\text{BO}} = \frac{4}{1,62} = 2,47 ,$$

on en déduit par cours que l'erreur de traînage vaut

$$\varepsilon_T = \frac{0,1}{K_{\text{BO}}} = 0,247 \text{ rad}$$

Question 11.10. Avec ce nouveau correcteur, la BO devient de classe 2 et donc, si le système est toujours stable (pré-condition à vérifier!), l'erreur de traînage sera nulle.