# Fiche 17 : Équations différentielles du second ordre.

**Exercice 1**

Donner la solution générale des équations différentielles suivantes (inconnue $t \to y(t)$ définie sur $\mathbb{R}$) :

1. $y'' - 4y' + 4y = 1 + e^t$
2. $y'' + 4y' - 5y = 2e^t$
3. $y'' + 2y' + y = \sin(2t)$
4. $y'' + y = \cos(t)$
5. $y'' - 2y' + y = 2e^t \sin(t)$

**Exercice 2**

Résoudre le problème de Cauchy (inconnue $x \to y(x)$ définie sur $\mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

**Exercice 3**

On considère le problème $(P)$ suivant :

Trouver 2 fonctions réelles $f$ et $g$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} f^2(x) - g^2(x) = 1 \\ f(x) = g'(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que si $f$ et $g$ sont solutions de $(P)$ alors $f$ et $g$ sont solutions de l'équation différentielle $y" = y$.
2. En déduire les solutions de $(E)$.

**Exercice 4**

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} y'' = -\omega^2 y \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

les inconnues sont : $y$ fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\omega > 0$.

1. Montrer que sauf pour certaines valeurs de $\omega$, on a forcément $y = 0$.
2. Représenter l'allure des solutions $y$ non nulles quand il y en a.

**Exercice 5**

Déterminer l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) + f(-x) = e^x$$

(On dérivera la relation précédente).