Fiche 49 : Fonctions dérivables.

Exercice 1

f est définie par :

$$f\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ f(x) = \sin(x)^3 \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ f(x) = 1 \text{ si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Déterminer le plus grand entier n tel que f soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

On considère la fonction

$$f\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{x}\right)} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme réel P_n tel que pour $x > 0$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}$$

2. En déduire que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$.
Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f la fonction prolongée.
Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 4

Soit le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 - 1$.

1. Montrer que P admet une unique racine réelle α. Calculer $[\alpha]$.
2. Prouver que $\alpha = 2 + \frac{1}{\alpha^2}$
   On introduit alors la fonction f définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = [\alpha]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 2$
4. Prouver que pour tout $x > 2$: $|f'(x)| < \frac{1}{4}$.
5. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Exercice 5

Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ $(a < b)$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

(a) Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a, b]$.

(b) Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a, b]$.
En appliquant le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(c) On suppose que $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l$$

(d) En déduire la limite :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$