Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 2024-2025.

Fiche 65 : Td du 03-04.

Exercice 1

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice dans la base canonique la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les noyaux : $\ker(A - I_3)$, $\ker(A - 2I_3)$, $\ker(A + 4I_3)$.
2. Déduire de la question précédente une base B qu'on précisera telle que $\mathrm{Mat}_B(f) = D$ soit une matrice diagonale qu'on précisera.
3. En déduire pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de A^n.

Exercice 2

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice dans la base canonique la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \\ 11 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur non nul ϵ_1 tel que : $f(\epsilon_1) = \epsilon_1$.
2. Déterminer un vecteur non nul ϵ_2 tel que : $f(\epsilon_2) = 2\epsilon_2$.
3. Déterminer un vecteur ϵ_3 tel que : $f(\epsilon_3) = 2\epsilon_3 + \epsilon_2$.
   Plusieurs choix de ϵ_3 sont possibles.
4. Montrer que la famille $B = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice T de f dans cette base.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ déterminer T^n (on pourra utiliser la formule du binôme).
6. En déduire pour $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Exercice 3

On considère dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer J^2 puis calculer en fonction de A, I, et $n \in \mathbb{N}$ la valeur de A^n.

   On considère les suites données par $p_0 = 1, q_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$\begin{cases} p_{n+1} = 2p_n + q_n \\ p_{n+1} = p_n + 2q_n \end{cases}$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose aussi : $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$.
3. En déduire les expressions de p_n et q_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

   On considère ici la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \text{Si } n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ et en déduire la limite de la suite u_n