

Fiche 67 : Intégration.

Exercice 1

1. (a) Montrer que, pour tout $i \geq 2$,

$$\int_{i-1}^i \ln(t) dt \leq \ln(i) \leq \int_i^{i+1} \ln(t) dt.$$

- (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_1^n \ln(t) dt \leq \ln(n!) \leq \int_1^n \ln(t) dt + \ln(n).$$

2. Pour tout $x > 0$, calculer $F(x) = \int_1^x \ln t dt$.
3. En déduire que $\ln(n!)$ est équivalent à $n \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 : Intégrales de Wallis

On pose, si $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3 .
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et converge vers un réel l .
3. Établir une relation de récurrence entre u_n et u_{n-2} pour $n \geq 2$.
4. En déduire une expression de u_{2n} et u_{2n+1} à l'aide de factorielles, de puissances de 2 et de π .
5. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n} \cdot u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$$

6. En déduire la valeur de l .
7. Montrer que $u_{2n} \sim u_{2n+1}$ puis le fait que :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$