1 Fonctions continues par morceaux

Definition 1.1 *Subdivision d'un segment*

On appelle subdivision d'un segment $[a,b]$ toute suite finie $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de réels telle que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

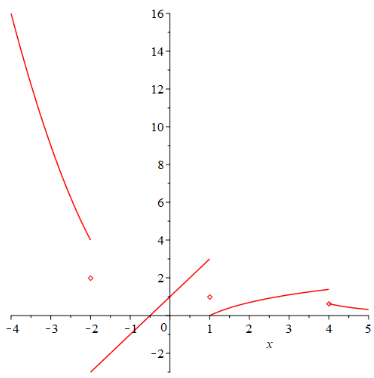
Definition 1.2

Soit $f : [a,b] \to \mathbf{K}$ $(a < b)$.

> On dit qu'une fonction f est continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ du segment $[a,b]$ telle que :
>
> $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ f est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$ et admet une limite finie à droite en x_k et une limite finie à gauche en x_{k+1}.

Une telle subdivision σ est dite adaptée à f (elle n'est pas unique).

Exemple 1.1

1. 

2. Toute fonction en escalier sur un segment $[a,b]$ est continue par morceaux sur ce segment.

3. Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est continue par morceaux sur ce segment.

Remarque 1.1 *Subdivision adaptée à deux fonctions continues par morceaux*

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbf{K}$ $(a < b)$ une fonction continue par morceaux, et soit $\sigma = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.

   Si on ajoute un point à la subdivision σ, alors on obtient encore une subdivision adaptée à f.

2. Si $f : [a,b] \to \mathbf{K}$ et $g : [a,b] \to \mathbf{K}$ sont deux fonctions continues par morceaux, alors il existe une subdivision adaptée à la fois à f et à g.

Proposition 1.1 *Propriétés algébriques*

1. Si $f : [a, b] \to \mathbf{K}$ et $g : [a, b] \to \mathbf{K}$ sont deux fonctions continues par morceaux et si $\lambda \in \mathbf{K}$, alors $f + g$, λf, fg et $|f|$ sont continues par morceaux.

2. On note $\mathcal{CM}([a, b], \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.
$\mathcal{CM}([a, b], \mathbf{K})$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel stable par produit.

3. Si $f : [a, b] \to \mathbf{K}$ est une fonction continue par morceaux, alors f est bornée sur $[a, b]$.

Definition 1.3 *Fonction continue par morceaux sur un intervalle*

Soit $f : I \to \mathbf{K}$ une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est continue par morceaux sur I lorsque, pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, la restriction de f à $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Exemple 1.2

1. La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.

2. Toute fonction continue sur un intervalle I est continue par morceaux sur I.

1.1 Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Proposition 1.2 Definition 1.4 *Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment*

Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux.
Soit $\sigma = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f.
Pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, $f_{|]x_k, x_{k+1}[}$ se prolonge en une fonction continue f_k sur $[x_k, x_{k+1}]$.
Alors, le nombre $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k$ est indépendant du choix de la subdivision adaptée à f.

On l'appelle intégrale de f sur $[a, b]$ et on le note $\displaystyle\int_a^b f$ ou encore $\displaystyle\int_{[a,b]} f$: $\boxed{\displaystyle\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k}$

Exemple 1.3

1. Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment $[a, b]$.

2. Si $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est continue sur $[a, b]$, alors f est continue par morceaux et son intégrale en tant que fonction continue par morceaux est égale à son intégrale en tant que fonction continue.

3. Valeur de l'intégrale sur $\left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$ de la fonction $f : t \mapsto \left\lfloor \dfrac{1}{t} \right\rfloor$.

Remarque 1.2 *Fonction à valeurs complexes*

Soit $f : [a, b] \to \mathbf{C}$.
f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si les fonctions réelles $Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues par morceaux sur $[a, b]$, et, dans ce cas, $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b Re(f) + i \int_a^b Im(f)$.

Definition 1.5

Soit $f : I \to \mathbf{K}$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle I.

Soit $(a,b) \in I^2$, on définit $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ de la façon suivante :

- Si $a < b$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f$ (au sens précédent).
- Si $a = b$, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$.
- Si $a > b$, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f$ (au sens précédent).

1.2 Propriétés de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

On conserve la quasi totalité des propriétés de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue.

Proposition 1.3 *Propriétés usuelles*

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{CM}(I, \mathbf{K})$ et $(a,b) \in I^2$.

1. **Relation de Chasles** (*additivité par rapport à l'intervalle*) :
$$\forall c \in I, \quad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$
2. **Linéarité** (*par rapport à la fonction*) :
$$\forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$
3. **Positivité** :
Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ $(a < b)$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.
4. **Croissance de l'intégrale** :
Si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$ $(a < b)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.
5. **Inégalité triangulaire et de la moyenne** :
   - Si $a \leqslant b$ alors $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f| \leqslant (b-a).\underset{[a,b]}{Sup}|f|$. Et $\displaystyle\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \underset{[a,b]}{Sup}|f|.\int_a^b |g|$.
   - Si $a > b$ alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|-\int_b^a f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_b^a |f(t)\mathrm{d}t|\mathrm{d}t$.
6. **Stricte positivité** :
Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, $(a < b)$, non nulle en un point où elle est continue, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0$.

   Attention, si f est continue par morceaux positive sur $[a,b]$ avec $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$, on n'a plus f nulle sur $[a,b]$.
7. Si f et g coïncident sur I sauf en un nombre fini de points alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

2 Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$

Soit a un réel.

Definition 2.1

Soit f une fonction à valeurs complexes continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est dite convergente lorsque $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

Si tel est le cas, on note alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ cette limite, **sinon** on dit que l'intégrale est divergente.

Exemple 2.1 **Exemples de référence**

- L'intégrale de Riemann $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$
- Pour $a \in \mathbf{R}$, l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha > 0.}$

Proposition 2.1 *Cas d'une fonction positive*

Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée.

Proposition 2.2 *Comparaison $0 \leqslant f \leqslant g$*

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ entraine celle de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.

Exemple 2.2

$\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t^2+3t+2}\mathrm{d}t$ convergent.

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$ divergent.

3 Intégration sur un intervalle quelconque

Dans cette partie, f est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes.

3.1 Définitions et calculs

Definition 3.1 *Convergence*

Soit $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

- Si f est continue par morceaux sur $[a,b[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est dite convergente (en b) lorsque la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie à gauche en b.
  Si c'est le cas, on pose :
  $$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}$$
  Sinon $\displaystyle\int_a^b f$ est dite divergente en b.

- Si f est continue par morceaux sur $]a,b]$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est dite convergente (en a) lorsque la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie à droite en a.
  Si c'est le cas, on note :
  $$\boxed{\int_a^b f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t}$$
  Sinon l'intégrale est dite divergente en a.

- Si f est continue par morceaux sur $]a,b[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est dite convergente en a et en b lorsque pour c fixé dans $]a,b[$ les **deux intégrales** $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ sont convergentes (resp. en a et en b.)
  Si c'est le cas, on note :
  $$\boxed{\int_a^b f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a^+}\int_x^c f(t)\mathrm{d}t + \lim_{y\to b^-}\int_c^y f(t)\mathrm{d}t}$$
  Sinon l'intégrale est dite divergente.

Etudier la nature d'une intégrale $\displaystyle\int_I f$ *c'est étudier si* $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbf{K})$ *et si cette intégrale est convergente ou divergente.*

Proposition 3.1

Si f est continue par morceaux sur $[a, b[$ et à valeurs positives alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.

Adaptation au cas $f \in CM(]a, b], \mathbf{K})$.

Corollaire 3.2

Soit f et g deux fonctions conrtinues par morceaux et positives sur $[a, b[$.
Si $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, b[$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.
On a le même résultat avec $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Proposition 3.3 **Calcul avec une primitive**

Si f est continue sur $]a, b[$ et si F est une primitive de f sur $]a, b[$ alors, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F admet une limite finie en a et une limite finie en b.

Si c'est le cas, on notera :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = \lim_b F - \lim_a F}$$

Exemple 3.1

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ converge et vaut π.

Remarque 3.1 *Cas d'une fonction continue par morceaux sur un segment*

Si f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ alors les définitions précédentes sont cohérentes avec la définition donnée dans la première partie :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{]a,b]} f = \int_{[a,b[} f = \int_{]a,b[} f$$

Remarque 3.2 *Cas d'une fonction continue par morceaux sur* $]a, b]$ *prolongeable en* a

Si f est continue par morceaux sur $]a, b]$ et prolongeable par continuité en a, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge et est dite faussement impropre en a.

De même pour f continue par morceaux sur $[a, b[$ et prolongeable par continuité en b.

Exemple 3.2 **Exemples de référence**

- $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge.
- L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si $\alpha < 1$.

3.2 Propriétés de l'intégrale généralisée

Proposition 3.4 **Premières propriétés**

On note f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I.

Si $\displaystyle\int_I f$ **et** $\displaystyle\int_I g$ **convergent** alors :

- $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbf{C}^2$, $\displaystyle\int_I(\alpha f+\beta g)$ converge et on a :

$$\int_I(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_I f+\beta\int_I g \qquad \textbf{linéarité}$$

- si f positive sur I alors $\displaystyle\int_I f\geqslant 0$ **positivité**.
- Si $f\leqslant g$ sur I alors

$$\int_I f\leqslant\int_I g \qquad \textbf{croissance}$$

- Si $(a,b,c)\in\bar{I}$ alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\mathrm{d}t \qquad \textbf{relation de Chasles}$$

Proposition 3.5 **Intégration par parties**

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Si le produit fg admet une limite finie en a et une limite finie en b **alors** les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Et en cas de convergence on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t=[fg]_a^b-\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t=\lim_b fg-\lim_a fg-\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

Remarque 3.3

Lorsque le produit fg admet une limite infinie en a et/ou en b, on pourra faire une intégration par parties sur un segment $[x, y] \subset]a, b[$ suivi d'un passage à la limite quand x tend vers a et quand y tend vers b. Après étude d'une ou plusieurs formes indéterminées, on pourra parfois obtenir un résultat intéressant.

Exemple 3.3

Convergence et calcul de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$.

Proposition 3.6 **Changement de variable**

• Si $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ est une bijection strictement croissante de classe C^1, et si f est continue sur $]a, b[$ alors

$$\int_\alpha^\beta \varphi'(u) f \circ \varphi(u)\mathrm{d}u \text{ et } \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ sont de même nature.}$$

Et en cas de convergence : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \varphi'(u)(f \circ \varphi)(u)\mathrm{d}u$

• Si $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ est une bijection strictement décroissante de classe C^1, et si f est continue sur $]a, b[$ alors

$$\int_\alpha^\beta \varphi'(u) f \circ \varphi(u)\mathrm{d}u \text{ et } \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ sont de même nature.}$$

Et en cas de convergence : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta \varphi'(u)(f \circ \varphi)(u)\mathrm{d}u$

Exemple 3.4

• Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

• Pour a et b deux réels tels que $a < b$, les intégrales

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\mathrm{d}x \text{ et } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\mathrm{d}t \text{ convergent si, et seulement si } \alpha < 1.$$

4 Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Dans toute cette partie f désigne une fonction à valeurs réelles ou complexes et I un intervalle de $\mathbf{R}$.

Definition 4.1 Intégrale absolument convergente

Si f est continue par morceaux sur I, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ est absolument convergente lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente.

Proposition 4.1 Inégalité triangulaire

Si l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente alors l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et dans ce cas, on a :

$$\boxed{\left|\int_I f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_I |f(t)|\mathrm{d}t}$$

Definition 4.2 Fonction intégrable sur un intervalle

Une fonction est dite **intégrable** sur l'intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et si son intégrale sur I est **absolument convergente**.

Lorsque $I = [a, b[$ on dira aussi que f est intégrable en b et si $I =]a, b]$ on dira que f est intégrable en a.

Proposition 4.2 Stricte positivité

Si f est continue, intégrable et positive sur I et si $\displaystyle\int_I f = 0$ alors f est identiquement nulle sur I.

Proposition 4.3

L'ensemble $L^1(I, \mathbf{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Exemple 4.1 Fonctions de référence

- La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable en 0.
- La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable en $+\infty$ **SSI** $\alpha > 0$.
- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ **SSI** $\alpha > 1$, et est intégrable en 0^+ **SSI** $\alpha < 1$.

Proposition 4.4 Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$, avec $a \in \mathbf{R}$.

• Si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(g(t))$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f.
Et donc si f n'est pas intégrable en $+\infty$ alors g non plus.

Même résultat si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(g(t))$.

• Si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$ alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g.

On adapte ce résultat lorsque I est $]a,b]$ ou $[a,b[$ ou $]a,b[$ avec l'intégrabilité en a et/ou en b.

Exemple 4.2

• Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(t)-1}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ converge.

• Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[\pi,+\infty[$.

Remarque 4.1 *Règle de $t^\alpha f(t)$ (à redémontrer sur chaque exemple)*

Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbf{K}$ continue par morceaux.

- Si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *très rapidement*, on peut penser à regarder si $t^\alpha f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour un certain $\alpha > 1$, car alors $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ et on peut conclure à l'intégrabilité de f sur $[a,+\infty[$.
- Si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *lentement*, on peut penser à regarder si $tf(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\dfrac{1}{t} \underset{+\infty}{=} o(|f(t)|)$ et on peut conclure que f n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$.

Exemple 4.3

Étude de l'intégrabilité en $+\infty$ de $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^2+1}$ et de $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t+1}$.

Remarque 4.2

• La fonction $t \mapsto f(t)$ est intégrable en a^+ **SSI** la fonction $x \mapsto f(a+x)$ est intégrable en 0^+.

• La fonction $t \mapsto f(t)$ est intégrable en b^- **SSI** la fonction $x \mapsto f(b-x)$ est intégrable en 0^+.