

Problème 213 tangentes à un cercles issues d'un point

B	F	Ra:2	Re:1	Tech:1	Ca:2
---	---	------	------	--------	------

- Dans tout ce devoir, le plan est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct et notera $\mathcal{B}$ la base $(\vec{i}, \vec{j})$ des vecteurs du plan.
- On pourra noter $\text{Mat}_{\mathcal{R}}(M)$ la matrice colonne des coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u})$ la matrice colonne des coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans $\mathcal{B}$.
- On notera par ailleurs $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ lorsque $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont deux bases d'un même espace vectoriel.

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω de rayon $R > 0$ ainsi qu'un point A extérieur au disque délimité par $\mathcal{C}$ c'est à dire tel que $\Omega A > R$.

On rappelle que la tangente à $\mathcal{C}$ en un point M de $\mathcal{C}$ est la droite passant par M et perpendiculaire au rayon $[\Omega M]$ et aussi qu'une droite d est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si elle admet un unique point d'intersection avec $\mathcal{C}$.

Le but du problème est de déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par A de plusieurs manières différentes.

Pour cela on se place dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{i}', \vec{j}')$ où :

$$\vec{i}' = \frac{1}{\|\vec{\Omega A}\|} \cdot \vec{\Omega A}$$

et on notera $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$.

Partie I : utilisation d'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

- 1) Faire une figure représentant les éléments précédents et justifier que $\|\vec{i}'\| = 1$.

Indications

Utiliser la relation $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$

- 2) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}'$.

Indications

Utiliser que $M(x, y) \in \mathcal{C} \iff \Omega M^2 = R^2$.

- 3) Justifier que les coordonnées de A dans $\mathcal{R}'$ sont de la forme $(x_A, 0)$ où x_A est un nombre réel tel que $x_A > R$.

Indications

Utiliser la définition des coordonnées dans $\mathcal{R}'$: nombres réels x, y tels que :

$$\Omega M = x \vec{i}' + y \vec{j}'$$

- 4) Soit d une droite du plan passant par A .

- a) Justifier que si d est parallèle à l'axe des ordonnées, à savoir $(\Omega, \vec{j}')$, alors elle ne peut pas être tangente à $\mathcal{C}$. *Indications*

Un telle droite a pour équation cartésienne $x = x_A$ puis cherche son intersection avec le cercle $\mathcal{C}$ à l'aide d'un système.

On supposera donc par la suite que d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

- b) Justifier qu'elle admet une équation cartésienne du type :

$$y = m(x - x_A)$$

où m est un nombre réel.

Indications

Une telle droite a un coefficient directeur $m \in \mathbb{R}$ et une équation du type $y = mx + p$. Déterminer ensuite p avec la condition $A \in d$.

- c) Démontrer qu'un point $M(x, y)$ est dans l'intersection $\mathcal{C} \cap d$ si et seulement si ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} (1 + m^2)x^2 - 2m^2x_Ax + m^2x_A^2 - R^2 = 0 \\ y = m(x - x_A) \end{cases} \quad (1)$$

Indications

Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ puis écrire que les coordonnées du point M doivent vérifier cette équation et celle de d pour appartenir aux deux.

- d) Démontrer alors que d est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si :

$$m^2(x_A^2 - R^2) = R^2 \quad (2)$$

Indications

Utiliser que la première équation du système (1) est une équation du second degré en x et que par conséquent elle a une unique solution si et seulement si son discriminant est nul. Or d est tangent à $\mathcal{C}$ si et seulement si le système (1) a une unique solution.

- e) En déduire qu'il existe deux points M sur $\mathcal{C}$ tels que (AM) est tangente à $\mathcal{C}$ en M et exprimer les coordonnées de ces points dans $\mathcal{R}'$ en fonction de x_A et R .

Indications

Déduire de la question précédente les deux valeurs de m telles que d est tangente à $\mathcal{C}$ puis résoudre le système (1) pour chacune des ces valeurs (on résoudra par substitution la première équation du système fournissant la valeur de x par les formules du trinôme dans le cas discriminant nul.

Partie II : utilisation d'un paramétrage de $\mathcal{C}$.

- 1) Soit M de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}'$ un point de $\mathcal{C}$. Démontrer qu'il existe $t \in [-\pi, \pi]$ tel que :

$$\begin{cases} x = R \cos(t) \\ y = R \sin(t) \end{cases}$$

(on demande ici de produire une démonstration **à partir du fait que $\Omega M = R$** .)

Indications

Pour $M(x, y)$ dans le plan :

$$\Omega M = R \iff \Omega M^2 = R^2$$

puis obtenir alors une équation portant sur les coordonnées de M du type $A^2 + B^2 = 1$. On rappelle alors que cela équivaut à l'existence d'un paramètre $t \in [-\pi, \pi]$ tel que :

$$A = \cos(t) \quad \text{et} \quad B = \sin(t).$$

- 2) Démontrer que la droite (AM) est tangente à $\mathcal{C}$ en M si et seulement si : $x_A \cos(t) = R$. (On passera par une formulation de la condition de tangence à l'aide du produit scalaire).

Indications

Utiliser que la droite (AM) est tangente à $\mathcal{C}$ en M si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = 0$ puis traduire cette condition à l'aide des coordonnées obtenues à la question précédente.

- 3) En déduire qu'il existe exactement deux points M du cercle tels que (AM) est tangente à $\mathcal{C}$ en M .

Indications

Démontrer que l'équation $x_A \cos(t) = R$ d'inconnue t a exactement deux solutions dans $[-\pi, \pi]$ et utiliser la question précédente.

On précisera bien pourquoi les deux points trouvés sont distincts.

Partie III : application à un cas particulier.

On se place dans cette question dans le cas du cercle $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$$

et du point $A(0; 5)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

- 1) Déterminer le centre Ω de $\mathcal{C}$ ainsi que son rayon R .

Indications

Utiliser le procédé de factorisation canonique habituel pour arriver à une forme :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

et en déduire le centre et le rayon.

- 2) Donner les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des vecteurs $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ du repère $\mathcal{R}'$ défini au départ.

Indications

Les coordonnées de $\vec{i}'$ sont facile à obtenir car on a les coordonnées de Ω et A qui permettent de calculer celle de $\vec{\Omega A}$. On trouve $\vec{i}'(\alpha, \beta)$.

Ensuite il est facile de vérifier que le vecteur $\vec{u}(-\beta, \alpha)$ est orthogonal à $\vec{i}'$, de norme 1 et tel que $\det(\vec{i}', \vec{u}) = 1$ ce qui fait que $\vec{u} = \vec{j}'$.

- 3) En utilisant les résultats démontrés précédemment, donner les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ des points M_1 et M_2 de $\mathcal{C}$ tels que (AM) soit tangente à $\mathcal{C}$.

Indications

Utiliser les résultats de la partie I.

- 4) Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Indications

Utiliser simplement la définition d'une matrice de passage et la question 2) de cette partie.

- 5) Justifier l'égalité :

$$\text{Mat}_{\mathcal{R}}(M) = \text{Mat}_{\mathcal{R}}(\Omega) + P \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\vec{\Omega M})$$

Indications

Utiliser la relation de changement de coordonnées entre les bases $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{i}', \vec{j}')$ en l'appliquant au vecteur $\vec{\Omega M}$ puis utiliser que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{R}}(\vec{\Omega M}) = \text{Mat}_{\mathcal{R}}(M) - \text{Mat}_{\mathcal{R}}(\Omega)$$

- 6) En déduire les coordonnées des deux points M_1, M_2 dans $\mathcal{R}$ ainsi que des équations cartésiennes de (AM_1) et (AM_2) .

- 7) Faire une figure pour vérifier.