Exercices d'oraux de mathématiques

Sélection d'énoncés rapportés d'oraux donnés aux concours et classés par thèmes

1 Algèbre

1.1 Sous-espaces vectoriels & applications linéaires

1. **RMS 2014 903a Centrale PSI**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $\dim(\operatorname{Ker} u) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u^2) \leqslant 2\dim(\operatorname{Ker} u)$. (On pourra utiliser l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im}(u)$.)

2. **RMS 132 1126 CCINP PSI 2021**
Soient E un espace vectoriel de dimension 4 et u un endomorphisme de E. Montrer que :

(a) si $\operatorname{rg}(u) = 2$ et $u^2 = 0$, alors $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)$ et il existe une base dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) si $\operatorname{rg}(u) = 3$ et $u^4 = 0$, alors $\operatorname{Ker}(u^2) = \operatorname{Im}(u^2)$ et il existe une base dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. **RMS 2012 275 X ESPCI PC, RMS 2013 305 X ESPCI PC, RMS 2013 869 Centrale PC**
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi \colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$. Calculer la trace de Φ.

4. **RMS 2007 768 Centrale PSI**
Soient E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E = F \oplus G$ et on note p le projecteur sur F parallèlement à G et $q = \mathrm{id}_E - p$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que F est stable par f si et seulement si $q \circ f \circ p = 0$.

5. **RMS 2016 969 CCP PC & RMS 2010 814 Centrale PSI**
Soit $S \colon \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'application qui à f associe $S(f) \colon x \mapsto \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que, si $S(f) = 0$, alors f est périodique.

(b) L'application S est-elle injective ? surjective ?

(c) Soit $n \geq 2$. Montrer que S induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$, noté s.

(d) L'endomorphisme s est-il bijectif ? diagonalisable ?

6. **RMS 2006 1043 CCP PSI**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g = E \iff \operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.

7. **RMS 2014 639 Mines Ponts PSI**
Soient E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f^2 = 0$ si, et seulement si, il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = f$ et $g \circ f = 0$.

8. **RMS 2016 324 X ESPCI PC**
Mots-clés : caractérisation des matrices non inversibles
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det A = 0$ si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AB = BA = 0$.

9. **RMS 2024 303 X MP MPI**
Soient p un projecteur et u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $p \circ u + u \circ p = u$. Montrer que $\operatorname{tr}(u) = 0$.

10. **RMS 2024 930 Mines Ponts PSI**
Soient un espace vectoriel E, un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et un sous-espace vectoriel F stable par u. On suppose que u est nilpotent et que $E = F + \operatorname{Im}(u)$. Montrer que $E = F$.

11. **UPS 20240331**
Mots-clés : commutant d'une matrice
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n$ l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients complexes et $\mathcal{T}_n$ le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n$, on pose f_A l'endomorphisme défini sur $\mathcal{M}_n$ par $f_A(M) = AM - MA$.

(a) On suppose que $A \in \mathcal{T}_n$. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{T}_n$, la matrice $f_A(M)$ est triangulaire supérieure stricte. En déduire que $\dim(\mathcal{T}_n \cap \operatorname{Ker} f_A) \geq n$.

(b) Soit une matrice quelconque $A \in \mathcal{M}_n$. Montrer que $\dim(\operatorname{Ker} f_A) \geq n$.

1.2 Réduction

12. RMS 132 1003 Centrale PSI 2021

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que toute matrice non nulle de F soit inversible.

(a) Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que, si les matrices A et B sont inversibles, alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha A - B$ n'est pas inversible. Qu'en déduire sur la dimension de F ?

(b) Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Examiner le cas où n est impair. Donner un exemple où la dimension de F est 2. Montrer que, si n est pair, alors $\dim F \leq n$.

13. RMS 2012 1319 CCP PC

Mots-clés : polynômes annulateurs

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ f$ est un projecteur.

Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^3 = f$.

14. RMS 2014 903b Centrale PSI

Mots-clés : polynômes annulateurs

Soit $M = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer le polynôme minimal de la matrice M.

(b) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ semblable à M.

15. A1 CCP MP 2018

Mots-clés : polynômes annulateurs

Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T - I_n = 0$.

(a) Montrer que la matrice M est diagonalisable.

(b) Montrer que M est inversible si, et seulement si, 1 n'est pas une valeur propre de M.

16. RMS 2011 1128 CCP PC

Mots-clés : polynômes annulateurs

(a) On définit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = 2M + {}^{\mathrm{t}}M$. Déterminer un polynôme annulateur de φ. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

(b) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi_{a,b} : M \mapsto aM + b\,{}^{\mathrm{t}}M$. Montrer que $\varphi_{a,b}$ est inversible si, et seulement si, $a^2 \neq b^2$.

17. RMS 2016 757 Centrale PSI

Mots-clés : symétries qui anticommutent

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

(a) Montrer que la dimension de E est paire.

(b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

18. RMS 2016 472 Mines Ponts PSI

Mots-clés : racine carrée de la dérivation

On note E l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a) Soient E_1 le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions sinus et cosinus et $\phi_1 \colon f \in E_1 \mapsto f' \in E_1$. Montrer qu'il existe un endomorphisme u de E_1 tel que $u \circ u = \phi_1$.

(b) Soit $\phi \colon f \in E \mapsto f' \in E$. Quel est le spectre de ϕ ? Existe-t-il un endomorphisme v de E tel que $v \circ v = \phi$?

19. RMS 2013 585 Mines Ponts PSI, RMS 2013 332 X ESPCI PC, RMS 2016 905 TPE PSI

Mots-clés : valeur propre commune

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et χ_A, χ_B leurs polynômes caractéristiques respectifs.

(a) Montrer que : si A et B ont une valeur propre commune, alors il existe U et V non nuls dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $AU\,{}^{\mathrm{t}}V = U\,{}^{\mathrm{t}}V\,B$.

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que : si $AM = MB$, alors $\chi_B(A)M = 0$.

(c) À quelle condition, nécessaire et suffisante, les matrices A et B ont-elles une valeur propre commune ?

20. RMS 2014 1198 TPE PSI

(a) Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$ et $u\colon P \in \mathbb{C}_d[X] \mapsto (X-a)P' \in \mathbb{C}_d[X]$. Trouver les éléments propres de u.

(b) En déduire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur dérivée.

21. RMS 2007 934 CCP PC

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_n$ ne soit pas inversible.

(a) Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = iX$ et $X \neq 0$.

(b) Montrer qu'il existe U et V dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ libres tels que $AU = -V$ et $AV = U$.

22. RMS 2016 885 ENSAM PSI

Mots-clés : matrice circulante

Soient

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Quel est son spectre ?

(b) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Quel est son spectre ?

23. RMS 2010 1043 Petites Mines PC

Soient un entier $n \geq 2$, un réel m et la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = 1$ si $(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n-1\}$ et $a_{i,n} = m$ si $1 \leqslant i \leqslant n$.

(a) On suppose que $m \neq 1-n$. Montrer que A est diagonalisable.

(b) On suppose que $m = 1-n$. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dont tous les coefficients sont nuls excepté $b_{1,2} = 1$.

24. RMS 2016 904 CCEM PSI

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit M une matrice carrée dont la première ligne est $(a, 0, \dots, 0)$ la deuxième $(1, \dots, 1)$, et toutes les autres $(1, 0, \dots, 0)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que M soit diagonalisable.

25. RMS 2014 1331 TPE PC

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi_A\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $\Phi_A = 0$.

(b) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, comparer $\Phi_{P(A)}$ et $P(\Phi_A)$.

(c) Montrer que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

26. RMS 2014 1183 CCP PSI, RMS 2016 903 CCP PSI

L'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui envoie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$ est-il diagonalisable ?

27. RMS 2013 970 TPE EIVP PSI

Discuter, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la diagonalisabilité et la trigonalisabilité en fonction du paramètre réel a de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix}$.

28. RMS 2011 1079 CCP PSI, RMS 2013 648 Mines Ponts PC, RMS 2014 1225 CCP PSI, RMS 2016 919 ENSEA PSI

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M\,{}^{\mathrm{t}}M\,M = I_n$. Montrer que M est symétrique. Déterminer M.

29. RMS 2016 898 CCP PSI

Mots-clés : hyperplan stable

(a) Soient H un hyperplan d'un $\mathbb{C}$–espace vectoriel E de dimension finie, et u un endomorphisme de E.
Montrer que $u(H) \subset H \iff \exists\lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id}) \subset H$.

(b) Trouver tous les sous-espaces stables par l'endomorphisme u représenté dans une base B par

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

30. RMS 2015 686 Mines Ponts PC

Mots-clés : hyperplan stable

Soient $n \geqslant 2$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ non nulle et $H = \mathrm{Ker}\,\Phi$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que f stabilise H si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi \circ f = \lambda\Phi$.

31. RMS 2024 65 ENS MP MPI

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M = (m_{ij}) \in \mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice d'une réflexion et $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.
Montrer que $\chi_B(1) = \chi_A(0) \cdot \chi_A(1) \cdot (1 - m_{11})$.

1.3 Algèbre bilinéaire

32. RMS 2014 659 Mines Ponts PSI

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ (\mathrm{tr}\,A)^2 \leqslant \lambda\,\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}A\,A)\}$.

(b) Trouver $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+,\ \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \det A \leqslant \lambda\,\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}A\,A)\}$.

33. RMS 2014 913 Centrale PSI

(a) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 P(t)\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t)\ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi P(t)Q(t)\sin t\,\mathrm{d}t$.

34. RMS 2006 1119 CCP PC, RMS 2010 1055 Télécom Sud Paris PC

Soient $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, p un projecteur orthogonal de rang r et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = r$.

35. RMS 2011 1126 CCP PC

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, H_1 et H_2 deux hyperplans distincts, e_1 et e_2 deux vecteurs unitaires respectivement orthogonaux à H_1 et H_2. On pose

$$s_1 \colon x \mapsto x - 2\langle x, e_1\rangle e_1 \quad \text{et} \quad s_2 \colon x \mapsto x - 2\langle x, e_2\rangle e_2.$$

(a) Vérifier que le plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est stable par $s_2 \circ s_1$.

(b) Montrer que $x \in E$ est fixe par $s_2 \circ s_1$ si et seulement si $x \in H_1 \cap H_2$.

36. RMS 2016 761 Centrale PSI

Soient p et q deux projections orthogonales définies sur un espace euclidien E. Soit $u = p + q$.

(a) Soit x un vecteur de norme 1. Encadrer $\langle x \mid p(x)\rangle$ et $\langle x \mid q(x)\rangle$. En déduire que $\mathrm{Sp}(u) \subset [0, 2]$.

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

(c) Déterminer $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$.

37. RMS 2008 975 CCP PSI, RMS 2015 715 Mines Ponts PC, RMS 2015 1033, TPE PC, RMS 2016 558 Mines Ponts PC

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n^{3/2}.$$

38. RMS 2009 1027 Centrale PC

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien.

(a) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint tel que $\langle g(z), z\rangle = 0$ pour tout $z \in E$. Montrer que $g = 0$.

(b) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint tel que $\langle g(z), z\rangle = \|g(z)\|^2$ pour tout $z \in E$. Montrer que g est un projecteur.

39. RMS 2013 987 CCP PSI

Mots-clés : valeurs propres de la partie symétrique d'une matrice

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = \frac{1}{2}(A + {}^{\mathrm{t}}A)$. On note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ le spectre ordonné par ordre croissant de S. Si μ est une valeur propre réelle de A, montrer que $\lambda_1 \leqslant \mu \leqslant \lambda_n$.

40. OdT 2013 19 149 TPE PSI

Mots-clés : matrice symétrique semblable à sa diagonale

Soit S symétrique réelle et D diagonale dont les coefficients sont ceux de la diagonale de S. On suppose S et D semblables. Calculer $\mathrm{tr}(S^2)$ de deux manières et en déduire que $S = D$.

41. RMS 2010 1028 TPE PSI

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Écrire la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle π et d'axe dirigé par le vecteur (a, b, c).

42. RMS 2014 180 ENS PC

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note $\mathcal{S}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $\Phi\colon (t, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S} \mapsto e^{tA}X_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est bijective.

43. RMS 2024 314 X MP MPI

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E. Montrer que :

(a) l'endomorphisme $p \circ q \circ p$ est autoadjoint positif ;

(b) $E = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Ker}\, q + (\mathrm{Im}\, q \cap \mathrm{Ker}\, p)$;

(c) l'endomorphisme $p \circ q$ est diagonalisable ;

(d) le spectre de $p \circ q$ est inclus dans $[0, 1]$.

44. RMS 2024 754 Mines Ponts MP MPI

Soit une fonction $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $120\left(\int_0^1 f\right)^2 \leq \int_0^1 (f'')^2$.

1.4 Espaces vectoriels normés

45. RMS 2011 948 Centrale PC

Mots-clés : continuité d'une application

On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme donnée par $\forall f \in E,\ \|f\|_2 = (\int_0^1 f^2)^{1/2}$. Soient

$$\Phi\colon f \in E \mapsto \int_0^1 f \quad \text{et} \quad \Psi\colon f \in E \mapsto \int_0^1 |f|.$$

Montrer que Φ et Ψ sont des applications continues de $(E, \|\ \|_2)$ dans $\mathbb{R}$.

46. RMS 2014 661 Mines Ponts PSI

Mots-clés : continuité d'une application linéaire

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$. Soient $e \in E$ et $T_e\colon f \in E \mapsto \int_0^1 e(t)f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$. Montrer que T_e est une forme linéaire continue et calculer $|||T_e|||_\infty$, la norme de T_e subordonnée à $\|\ \|_\infty$.

Ind. Considérer $f_\varepsilon\colon t \mapsto \frac{e(t)}{|e(t)|+\varepsilon}$, où $\varepsilon > 0$.

47. RMS 2009 1031 Centrale PC

Mots-clés : continuité d'une application linéaire

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On fixe un réel α dans $[0, 1]$.

(a) On pose $f_n\colon x \in [0, 1] \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 + [n(x - \alpha)]^2}}$. Montrer que $\|f_n\|_2$ tend vers zéro.

(b) L'application $\Phi\colon f \in E \mapsto f(\alpha) \in \mathbb{R}$ est-elle continue pour la norme $\|\ \|_2$?

(c) Existe-t-il un réel $C > 0$ tel que $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_2$?

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Existe-t-il $C > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \|P\|_\infty \leqslant C\|P\|_2$?

48. RMS 2015 995 CCP PSI

Soit E l'espace des suites bornées à valeurs complexes. Montrer que $N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ et $N'(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}$ sont deux normes sur E. Sont-elles équivalentes ?

49. RMS 2009 977 Centrale PSI
On note $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le déterminant vaut 1. L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel ? une groupe mulitiplicatif ? un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

50. RMS 2024 102 ENS MP MPI
Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et définie par $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{p+q}$ si $p\in\mathbb{N}$ et $q\in\mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. Quels sont les points de continuité de f ?

1.5 Algèbre générale

51. RMS 2015 384 X ESPCI PC, RMS 2014 1165 CCP PSI

(a) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples.

i. Calculer $\frac{P'(x)}{P(x)}$ pour tout x appartenenant à $\mathbb{R}$ privé des racines de P. En déduire que $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)P''(x)\leqslant P'(x)^2$.

ii. Montrer que, si $\deg P\geq 2$, alors P' est aussi scindé à racines simples. En déduire que, si $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$, alors $a_ka_{k+2}\leqslant a_{k+1}^2$ pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$.

(b) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé. Le polynôme P' l'est-il aussi ?

52. RMS 2014 892 Centrale PSI

(a) Soient un réel a et une fonction f continue sur $[a,+\infty[$ et dérivable sur $]a,+\infty[$. On suppose que f s'annule en a et tend vers 0 en $+\infty$: qu'en déduire ? (On pourra utiliser la fonction $x\mapsto f(a+\frac{1}{x}-1)$ pour le prouver.)

(b) Soient $P\in\mathbb{R}[X]$ et $Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}P^{(k)}$. Montrer que, si P n'a pas de racine réelle, alors Q non plus. (On pourra utiliser la fonction $x\mapsto Q(x)e^{-x}$.)

53. RMS 2013 288 X ESPCI PC
Déterminer les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2+1)=P(X)^2+1$ et $P(0)=0$.

54. RMS 2012 272 X ESPCI PC
Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall t\in\mathbb{R},\ P_n(\sin^2 t)=\cos(2nt)$ et le déterminer.

55. RMS 2013 1048 TPE EIVP PC
Soient a,b dans $\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $P=(X-a)^n(X-b)^n$.

Donner une expression de la dérivée n-ième de P et en déduire $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$ en fonction de n.

56. RMS 2010 606 Mines Ponts PC
Déterminer les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4)P(X)=XP(X+1)$.

57. RMS 2011 255 X ENS PSI
Mots-clés : nombre de diviseurs d'un entier
Si $n\in\mathbb{N}^*$, soit d_n le nombre des diviseurs de n. On pose $D_n=d_1+\cdots+d_n$.

(a) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $A_n=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ ou $a_{i,j}=1$ si $i|j$ et zéro sinon. Montrer que $a_{i,1}+a_{i,2}+\cdots+a_{i,n}$ est égal à la partie entière de $\frac{n}{i}$.

(b) Montrer que D_n est la somme des éléments de la matrice A_n. En déduire que $D_n\sim n\ln n$.

58. RMS 2012 268 X ESPCI PC
Mots-clés : nombre de diviseurs d'un entier

(a) Soit n un entier strictement positif dont la décomposition en facteurs premiers est $\prod_{j=1}^{r}p_j^{\alpha_j}$. Déterminer le nombre de diviseurs de n.

(b) Quels sont les entiers $n\in\mathbb{N}^*$ ayant un nombre impair de diviseurs ?

59. RMS 2009 1009 Centrale PC
Mots-clés : polynômes stabilisant $\mathbb{Z}$
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\binom{X}{n}$ ou H_n le polynôme $\frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$. On pose $\Delta\colon P\in\mathbb{R}[X]\mapsto P(X+1)-P(X)\in\mathbb{R}[X]$.

(a) On dit qu'un polynôme P stabilise $\mathbb{Z}$ si $\forall k\in\mathbb{Z},\ P(k)\in\mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, H_n stabilise $\mathbb{Z}$.

(b) Déterminer $\operatorname{Ker} \Delta$ et calculer $\Delta(H_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ stabilisant $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que $P = c_0 H_0 + \cdots + c_n H_n$.

60. RMS 2024 14 ENS MP MPI

Mots-clés : formule de Grassmann

Soit G un groupe fini. Si X et Y sont des parties non vides de G, alors on pose $X^{-1} = \{x^{-1},\ x \in X\}$ et $XY = \{xy,\ (x, y) \in X \times Y\}$. Dans la suite, X désigne une partie non vide de G.

(a) On suppose que $|XX| < 2|X|$. Montrer que $XX^{-1} = X^{-1}X$.

(b) On suppose que $|XX^{-1}| < \frac{3}{2}|X|$. Montrer que $X^{-1}X$ est un sous-groupe de G.

61. RMS 2024 424 X ESPCI PC

On veut montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m) \in \{-1; +1\}^m$ tel que $n = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k k^2$.

(a) Prouver la propriété pour tout $n \in \{1; 2; 3\}$.

(b) Développer les polynômes $(X+3)^2 - (X+1)^2$ et $(X+4)^2 - (X+2)^2$ et conclure.

62. RMS 2024 519 Mines Ponts MP MPI

Déterminer tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3^m = 8 + n^2$.

63. RMS 2024 12 ENS MP MPI

Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une transposition (ab) telle que $1 \leq a < b \leq n$.

(a) Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la transposition (12) et le cycle $c = (12 \cdots n)$ engendrent le groupe symétrique S_n.

(b) Montrer que la transposition $\tau = (13)$ et le cycle $c = (1234)$ n'engendrent pas le groupe symétrique S_4. (On pourra s'intéresser à la parité de $\tau(i) - i$ et de $c(i) - i$ pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$.)

(c) Montrer que la transposition (ab) et le cycle $c = (12 \cdots n)$ engendrent S_n si, et seulement si, $b - a$ et n sont premiers entre eux.

2 Analyse

2.1 Suites & séries numériques

64. RMS 2013 993 CCP PSI

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0>0$ et $u_{n+1}=\frac{e^{-u_n}}{n+1}$. Nature de la série de terme général u_n.

65. RMS 2006 1124 CCP PC

Soit $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ une série convergente à termes strictement positifs. Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 0}e^{-1/u_n}$ convergent.

66. RMS 2013 1061 CCP PC

Soit (u_n) définie par $u_0\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sin u_n$.

(a) Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

(b) Étudier la limite de $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n^3}$. En déduire la nature de la série de terme général u_n^3.

(c) En étudiant $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$, montrer que la série de terme général u_n^2 diverge.

67. RMS 2014 668 Mines Ponts PSI

Soit la suite définie par $a_0>0$ et $a_{n+1}=1-e^{-a_n}$.

(a) Étudier la limite de cette suite.

(b) Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

(c) Déterminer la nature de la série de terme général a_n^2.

(d) Étudier la série de terme général $\ln(\frac{a_{n+1}}{a_n})$. En déduire la nature de la série de terme général a_n.

68. RMS 2013 688 Mines Ponts PC

Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ bornée et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $\alpha=\sup_{\mathbb{R}_+}f$.

(a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que f^n est intégrable. Soit $u_n=\int_0^{+\infty}f^n$.

(b) Si $\alpha<1$, montrer que la série de terme général u_n est convergente.

(c) Si $\alpha>1$, montrer que la série de terme général u_n est divergente.

69. RMS 2012 1327 CCP PC

Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 1–périodique et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\int_n^{n+1}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0$.

70. RMS 132 1163 CCP PSI 2021, RMS 130 1236 CCP PSI 2019

Soient deux suites réelles (a_n) positive et (u_n) définie par $u_0\geq 0$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\sqrt{u_n^2+a_n^2}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(a) Comparer $u_{n+1}-u_n$ et $\frac{1}{2}a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(b) Déterminer un équivalent de a_n dans le cas où $u_n=\frac{n}{n+1}$.

(c) La convergence de la suite (u_n) implique-t-elle la convergence de la série $\sum a_n$? Et réciproquement ?

71. RMS 2007 912 CCP PSI

Soient, pour tout réel $t\geq 1$, $f(t)=\frac{t}{t^2+t+1}$ et, pour tout entier $n\geq 1$, $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$.

Étudier le sens de variation de la fonction f, le sens de variation de la suite $(|u_n|)$ et la nature de la série $\sum u_n$.

72. RMS 2008 980 Télécom Sud Paris PSI, RMS 2013 657 Mines Ponts PC, RMS 2014 751 Mines Ponts PC

On considère la suite (u_n) définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\frac{(-1)^n\cos(u_{n-1})}{n}$. Nature de la série de terme général u_n ?

73. RMS 2012 328 X ESPCI PC

Mots-clés : transformation d'Abel

Soit $(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que (u_n) est décroissante et que la série de terme général u_n converge.

(a) Montrer que $\sum_{k=0}^n u_k=(n+1)u_n+\sum_{k=1}^n k(u_{k-1}-u_k)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que la suite de terme général $(n+1)u_n$ converge. En déduire que $nu_n\to 0$ quand $n\to+\infty$.

74. RMS 2013 344 X ESPCI PC

(a) Soient deux réels a et b tels que $b>a$. Étudier la limite de la suite des réels $(b+\sqrt[3]{n}\,)^3-(a+\sqrt[3]{n}\,)^3$.

(b) Montrer que l'ensemble $E=\left\{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n},\ (m,n)\in\mathbb{N}^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

75. RMS 2024 722 Mines Ponts MP MPI

Soient (u_n) une suite décroissante de réels positifs et (v_n) la suite définie par $v_n=\frac{1}{1+n^2u_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que : si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

2.2 Intégrales

76. RMS 2014 1247 ICNA PSI

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha(1-e^{-1/\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x$ converge.

77. RMS 2014 1249 ENSAM PSI

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ et F sa primitive qui s'annule en 0.

(a) Montrer que : si $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{F(x)}{1+x}$ pour tout $x \geq 0$.

(b) Montrer que les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et comparer leur valeur.

78. RMS 2013 376 X ESPCI PC, RMS 2014 761 Mines Ponts PC

Mots-clés : théorème de Cesàro pour les fonctions

(a) Soit F une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ admettant une limite finie L en $+\infty$. Montrer que $\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

(b) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente. Montrer que $\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

79. RMS 2015 1003 CCP PSI

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} xe^{-\lfloor x\rfloor}\,\mathrm{d}x$.

80. RMS 2014 781 Mines Ponts PC & RMS 2016 852 Centrale PC

Soit $F\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Former une équation différentielle vérifiée par F et en déduire la limite de F en 0^+.

(c) Déterminer un équivalent de F en $+\infty$.

81. RMS 2013 917 Centrale PC

Soit $F\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{t+x}\,dt$.

(a) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Calculer les intégrales $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt$. Étudier la limite de $1-xF(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Conclure.

82. RMS 2016 795 Centrale PSI

On considère la fonction $F\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cdot\frac{\operatorname{sh} t}{t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de F.

(b) Déterminer la limite de F en $+\infty$.

2.3 Suites & séries de fonctions

83. CCP PSI 2021

(a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3}\sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1+t^3}\,dt$ est convergente.

(b) Montrer que la suite des réels J_n converge vers le réel $K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\,dt$.

(c) À l'aide d'un changement de variable, prouver que $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\,dt$ et en déduire la valeur du réel K.

84. RMS 2013 1005 CCP PSI, RMS 2008 982 TPE PSI, RMS 2013 1005 CCP PSI, RMS 2015 748 Mines Ponts PC & RMS 2016 849 Centrale PC

Mots-clés : primitives itérées

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_0 = f$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a,b]$, $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[a,b]$ et déterminer sa somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ en résolvant une équation différentielle.

85. RMS 2009 1050 Centrale PC

Quel est l'ensemble de définition de $f\,:\,x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$? Cette fonction est-elle continue ?

86. RMS 2016 937 CCP PSI

Montrer que $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$ est défini pour tout réel x et que, pour tout $x \neq 0$, $S(x) = S(\frac{1}{x})$. Étudier la limite de S en $+\infty$.

87. RMS 2016 513 Mines Ponts PSI
Soit $S\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

(a) Montrer que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier le sens de variation de S.

(b) Étudier les limites de S en 0 et en $+\infty$.

(c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$.

(d) Déterminer un équivalent de S en 0^+ et en $+\infty$.

88. RMS 2013 606 Mines Ponts PSI, RMS 2016 512 Mines Ponts PSI & RMS 2016 583 Mines Ponts PC
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2x}{x^2+n^2}$. Montrer que la fonction $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. Étudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que la fonction f est continue mais que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

89. RMS 2016 371 X ESPCI PC
Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n\colon x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-n^2 x}$.

(a) Montrer que la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

(b) Étudier la limite de f en $+\infty$.

(c) Montrer que $\lim_{0^+} f = +\infty$. La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

90. RMS 2016 938 CCP PSI & RMS 2015 666 Mines Ponts PSI
On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-nx})$.

(a) Montrer que f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

(b) Étudier la limite de f en $+\infty$.

(c) Étudier la limite de f en 0^+. (On pourra vérifier que $\forall t \in [0, 1],\ \ln(1 + t) \geqslant \frac{t}{2}$.)

91. RMS 2008 987 ENSAM PSI
Soient deux fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et g continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que :

$$n \int_0^1 f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(0) \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

92. RMS 2015 1013 CCP PSI
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}$.

93. RMS 2010 849 Centrale PSI

(a) Étudier la convergence de $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

(b) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

94. RMS 2016 951 TPE PSI
Après avoir justifié l'existence de l'intégrale, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$.

95. RMS 2011 1150, CCP PC, RMS 2014 1262 Écoles des Mines PSI
Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

2.4 Séries entières

96. RMS 2015 1009 ENSAM PSI
Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^*}$ avec $a_1 \geqslant 1$. On pose $P_n\colon x \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$.

(a) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [0, 1]$ tel que $P_n(x_n) = 1$.

(b) Montrer que $P_{n+1}(x_n) \geq 1$. En déduire que la suite (x_n) est décroissante et qu'elle converge.

(c) On note $\ell = \lim x_n$ et on suppose que $\ell > 0$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur à ℓ.

97. RMS 2011 1092 CCP PSI
Déterminer, suivant $a \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière de terme général $\arctan(n^a)x^n$.

98. RMS 2013 1017 CCP PSI

(a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ et calculer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ pour tout $x \in]-R, +R[$.

(b) Montrer que, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

(c) Montrer que $\pi = 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^{2n+1}$.

(d) Majorer l'erreur commise en approchant π par la somme partielle d'ordre N de la série précédente.

99. RMS 2009 989 Centrale PSI

Soit (a_n) une suite de réels. On note R le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$ et R' celui de la série de terme général $\sin(a_n) x^n$.

Montrer que $R' \geqslant R$ et qu'il y a égalité si $R > 1$.

100. RMS 2015 749 Mines Ponts PC

Soit (a_n) une suite complexe. On suppose que $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, que $\sum a_{2n} z^n$ a un rayon de convergence $R_1 > 0$ et que $\sum a_{2n+1} z^n$ a un rayon de convergence $R_2 > 0$. Exprimer R en fonction de R_1 et R_2.

101. RMS 132-709 Mines-Ponts PSI 2021

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R strictement positif.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

(b) On pose $b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$. Montrer que la série entière $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence R' supérieur ou égal à 1. Puis prouver que $R' = \max(1, R)$.

102. RMS 2013 379 X ESPCI PC

Soient $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \prod_{k=1}^{n} (\frac{2k-1}{2k})$.

(a) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.

(b) Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1, +1[$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f sur $]-1, +1[$.

(c) Calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-1, +1[$.

103. RMS 2011 1145 CCP PC, RMS 2012 1333 CCP PC, RMS 2013 1062 CCP PC & RMS 2016 782 Centrale PSI

Mots-clés : nombre de dérangements

Soit $(d_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n)$.

(a) Calculer d_2 et d_3. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $\frac{n!}{3} \leqslant d_n \leqslant n!$ et en déduire le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\frac{d_n}{n!} x^n$.

(b) Pour tout $x \in]-R, R[$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $\forall x \in]-R, R[$, $(1-x)S'(x) = xS(x)$.

(c) En déduire une expression de $S(x)$ en fonction de x et exprimer d_n comme une somme en fonction de n.

104. RMS 2016 939 ENSEA PSI, RMS 2016 941 CCP PSI

Soit (a_n) dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_1 \geqslant a_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 2$, $a_n = a_{n-1} + \frac{2}{n} a_{n-2}$.

(a) Montrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite $(\frac{a_n}{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$

(b) Former une équation différentielle vérifiée par la somme et calculer cette somme dans le cas où $a_0 = a_1 = 1$.

105. RMS 2016 593 Mines Ponts PC, RMS 2013 607 Mines Ponts PSI, RMS 2014 770 Mines Ponts PC

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Soient $f \colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ et $g \colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n$.

(a) Montrer que la suite $(H_n - \ln n)$ est convergente.

(b) Montrer que les fonctions f et g sont définies sur $]-1, +1[$.

(c) Montrer que, pour tout $x \in]-1, +1[$, $f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

(d) Montrer que $f(x) \sim g(x)$ $(x \to 1^-)$.

106. RMS 2013 670 Mines Ponts PC, RMS 2006 1132 CCP PC, RMS 2011 1144 CCP PC, RMS 2013 1019 CCP PSI

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 (\frac{1+t^2}{2})^n \,\mathrm{d}t$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq \frac{1}{n+1}$ et étudier la limite de la suite (a_n).

Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f \colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$?

2.5 Équations différentielles & calcul différentiel

107. RMS 2014 1308 CCP PSI

Soit $(S)\left\{\begin{array}{l} x'(t)=y(t)-z(t) \\ y'(t)=z(t)-x(t) \\ z'(t)=x(t)-y(t), \end{array}\right.$ avec $x(0)=1,\ y(0)=z(0)=0$.

(a) Montrer que la trajectoire de toute solution est incluse dans une sphère et dans un plan.

(b) Résoudre directement (S).

108. RMS 2010 1026 CCP PSI

Mots-clés : raccordement de solutions

Soit $(E) : (1+x)y' - 2y = 0$.

(a) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E). Donner une base de l'ensemble des solutions.

(b) Donner une base de l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

109. RMS 2013 921 Centrale PC

Déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)+f(-x)=e^x$.

110. RMS 2016 525 Mines Ponts PSI

L'application $H\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $H(x,y)=\frac{x^4y}{x^4+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, et $H(0,0)=0$, est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$?

111. RMS 2009 998 Centrale PSI

Trouver les extrema de $(x,y)\mapsto \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$ sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant\pi,\ 0\leqslant x+y\leqslant\pi\}$.

112. RMS 2016 612 Mines Ponts PC

Déterminer les solutions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ de l'équation $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{x}$.

113. RMS 2013 396 X ESPCI PC

Mots-clés : accroissements finis

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ différentiable dont toutes les dérivées partielles sont bornées entre -1 et 1. Montrer que $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant\sqrt{n}\,\|x-y\|$.

114. RMS 2012 357 X ESPCI PC

Soit $f : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ différentiable telle que $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2,\ \|f(x)-f(y)\|\geqslant\|x-y\|$. Montrer que f est injective. Et que, pour tout $x_0\in\mathbb{R}^n$, $df(x_0)$ est bijective.

115. RMS 2009 1062 Centrale PC

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ différentiable. On suppose que $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^2)^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant\|x-y\|^2$. Montrer que f est constante.

116. RMS 2024 678 Mines Ponts MP MPI

Mots-clés : compacité et connexité par arcs

Soient un entier $n\geq 2$ et une fonction f continue de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f^{-1}(\{0\})$ est un compact non vide. Montrer que f admet un extremum global. Que dire si $n=1$?

117. RMS 2024 876 Mines Ponts MP MPI

Soit $f : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ différentiable telle que $\|f(x)\|\underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et que, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $df(x)$ est surjective. Soient $a\in\mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ x\mapsto\|f(x)-a\|^2$.

(a) Montrer que la fonction g est différentiable et exprimer $dg(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$.

(b) Montrer que la fonction g admet un munimum global.

(c) En déduire que la fonction f est surjective.

3 Probabilités

118. RMS 2017 482 X ESPCI PC & RMS 2018 518 X ESPCI PC

On place aléatoirement $n \geqslant 3$ boules dans n urnes. Calculer la probabilité qu'une seule urne soit vide.

119. RMS 2019 895 Mines Ponts PC

On lance indéfiniment un dé équilibré.

(a) Soit A_n l'événement «aucun 6 n'a été obtenu lors des n premiers lancers ». Déterminer $P(A_n)$.

(b) Soit F_k l'événement «le premier 6 est obtenu au k-ième lancer ». Déterminer $P(F_k)$.

(c) Soit K l'événement «6 n'apparaît jamais ». Exprimer K à l'aide des A_n. En déduire $P(K)$.

(d) Exprimer K en fonction des F_k. Retrouver la valeur de $P(K)$.

(e) Soient G l'événement «6 apparaît une infinité de fois » et H l'événement «6 apparaît à tous les lancers sauf un nombre fini d'entre eux ». Calculer $P(G)$ et $P(H)$.

120. RMS 2017 900 Mines Ponts PC, RMS 2016 615 Mines Ponts PC

On lance deux dés équilibrés. Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires correspondant aux résultats des lancers des dés 1 et 2. On pose $X = \min\{U_1, U_2\}$ et $Y = \max\{U_1, U_2\}$.

(a) Déterminer $P(X \geq k)$ et $P(Y \geq k)$ pour chaque $k \in [\![1, 6]\!]$.

(b) Calculer XY en fonction de U_1 et U_2 et en déduire que $E(XY) = (\frac{7}{2})^2$.

121. RMS 2017 1353 CCP PSI

Deux joueurs jouent avec des pièces équilibrées. Ils lancent chacun n fois une pièce. Celui qui gagne est celui qui obtient le plus grand nombre de fois pile. Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant ? On pourra utiliser (et éventuellement démontrer) l'égalité $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

122. RMS 2021 132 1190 CCP PSI 2021, RMS 2018 129 207 CCP PSI 2018

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, de même loi et admettant une variance. On suppose que la variable aléatoire $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

(a) Déterminer l'espérance et la variance de X.

(b) Calculer la fonction génératrice de X sur $]0, 1[$.

(c) En déduire la loi de X.

123. RMS 2016 964 CCP PSI

On considère une urne contenant $n - 1$ boules noires et une boule blanche.

(a) On effectue une succession de tirages avec remise dans cette urne et on note T la variable aléatoire donnant le rang du premier tirage amenant la boule blanche. Donner les valeurs prises par T, sa loi, son espérance et sa variance.

(b) On effectue maintenant des tirages sans remise.

i. Soit X la variable aléatoire donnant le rang du premier tirage amenant la boule blanche. Donner les valeurs prises par X, sa loi, son espérance et sa variance.

ii. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires restantes dans l'urne après le tirage de la boule blanche. Exprimer Y en fonction de X et n. Donner l'espérance de Y ainsi que sa variance.

124. RMS 2016 614 Mines Ponts PC

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Calculer $E(\frac{1}{X})$.

125. RMS 2017 1358 CCP PSI

Soit $n \geq 2$. On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note X_n le rang du premier tirage où l'on obtient une boule différente de la première boule tirée.

(a) Établir la loi de la variable aléatoire X_n.

(b) Justifier l'existence de l'espérance de X_n et la calculer.

126. RMS 2016 967 ENSEA PSI

Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $E(|X - \lambda|) = 2e^{-\lambda} \frac{\lambda^{N+1}}{N!}$, avec $N = \lfloor \lambda \rfloor$.

127. RMS 2017 1357 CCP PSI

Dans un casino, une machine renvoie un entier naturel N non nul selon la loi de probabilité : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(N = n) = \frac{1}{2^n}$. Le joueur gagne N jetons si N est pair ; il perd N jetons si N est impair.

(a) Quelle est la probabilité de gagner ?

(b) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G égale au gain algébrique du joueur.

128. RMS 2017 901 Mines Ponts PC

On lance une pièce qui a une probabilité p de donner pile. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux fois pile. Déterminer la loi de X et la fonction génératrice G_X de X. Calculer $E(X)$.

129. RMS 2016 803 Centrale PSI

Trois individus jouent au ballon :
— si A possède la balle, il l'envoie à B avec probabilité $\frac{1}{3}$ et à C avec probabilité $\frac{2}{3}$,
— si B possède la balle, il l'envoie à A avec probabilité $\frac{1}{3}$ et à C avec probabilité $\frac{2}{3}$,
— si C possède la balle, il l'envoie à B avec probabilité $\frac{1}{3}$ et à A avec probabilité $\frac{2}{3}$.
On note A_n l'événement : le joueur A reçoit le ballon au n-ième lancer, et on définit de même B_n, C_n. Étudier la limite des suites $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$.

130. RMS 2017 1355 CCP PSI

Mots-clés : la loi du 0 - 1 de Borel

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants.

(a) Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que la probabilité qu'aucun des événements $A_n, \ldots, A_{n+p}$ ne se réalise est inférieure ou égale à $\exp(-\sum_{k=n}^{n+p} P(A_k))$.

(b) On suppose que la série de terme général $P(A_n)$ est divergente. Montrer qu'il est presque impossible qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels A_n est réalisé.

(c) Montrer que, si la série de terme général $P(A_n)$ converge, alors il est presque certain qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels A_n est réalisé.

131. RMS 2016 630 Mines Ponts PC, RMS 2017 914 Mines Ponts PC

Mots-clés : maximum de lois géométriques indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit $Z = \max(X, Y)$. Déterminer l'espérance de Z.

132. RMS 2017 192 ENS PC

(a) Pour tout $\lambda > 0$, soit X_λ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Soit $c > 0$: montrer que $P(|X_\lambda - \lambda| \geqslant c\lambda) \to 0$ lorsque $\lambda \to +\infty$.

(b) Soient, pour tout $\lambda > 0$, des variables aléatoires indépendantes $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Étudier l'espérance de $\Delta_\lambda = B_\lambda^2 - 4A_\lambda C_\lambda$.

(c) Soit $E_\lambda(c) = \big((|A_\lambda - \lambda| < c\lambda) \cap (|B_\lambda - \lambda| < c\lambda) \cap (|C_\lambda - \lambda| < c\lambda)\big)$. Montrer que $E_\lambda(\frac{1}{3}) \subset (\Delta_\lambda < 0)$.

(d) Déterminer la limite, lorsque $\lambda \to +\infty$, de la probabilité que le polynôme $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ ait toutes ses racines réelles.

133. RMS 2017 1077 Centrale PSI

Mots-clés : marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$

On munit $\mathbb{R}^2$ de son repère orthonormé que l'on note $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Un marcheur, initialement en O, se déplace à chaque onstant n d'un pas dans l'une des quatre directions (nord, sud, est, ouest) de manière équiprobable. On note $A_n = (X_n, Y_n)$ sa position à l'instant n. On note aussi Z_n la distance du marcheur au point O à l'instant n.

(a) Déterminer l'espérance et la variance de X_n.

(b) Les deux variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ? Déterminer leur covariance.

(c) Montrer que $E(Z_n) \leqslant \sqrt{n}$.

134. RMS 2016 530 Mines Ponts PSI

Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2a$ boules blanches et a boules noires indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages avec remise d'une boule de l'urne. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de tirages effectués lorsqu'on obtient pour la première fois deux boules noires lors de deux tirages consécutifs.

(a) Montrer que la suite $(P(X \geqslant n))$ satisfait une relation de récurrence d'ordre 2. En déduire la loi de X.

(b) Montrer que X est d'espérance finie et calculer $E(X)$.

135. RMS 2024 172 ENS MP MPI

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes telle que $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Comparer $E(f(X))$ et $f(E(X))$.

(b) On dit que $X \leq_c Y$ si, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, $E(f(X)) \leq E(f(Y))$.

  i. Donner un exemple de couple (X, Y) tel que $X \neq Y$ et $X \leq_c Y$.

  ii. Montrer que, si $X \leq_c Y$, alors $E(X) = E(Y)$ et $V(X) \leq V(Y)$.

Commentaires :

1. Laissez entrevoir à l'examinateur dès le début de l'oral ce que vous avez su faire ou non de tous les exercices, par des formules du type « J'ai résolu, sauf erreur, le deuxième exercice et les questions 1 et 3 du premier exercice. Dans la question 2, je n'ai pas encore conclu mais je pense à un équivalent ou, peut-être à une comparaison série-intégrale. » Cela permettra à l'examinateur de vous relancer sur une des pistes. Et vous évitera la frustration, pris par le temps, de devoir sortir de la salle en fin d'oral en donnant l'impression de ne pas avoir touché à une question que vous aviez pourtant abordée.
2. À l'oral, au contraire de l'écrit, on annonce le résultat ou la conclusion **puis** on en fait le calcul ou la preuve. Parce que :
   — il est chronophage de prouver un résultat erroné ;
   — l'examinateur vous dispensera parfois de développer le calcul d'un résultat, s'il constate que vous avez obtenu le bon résultat. Rien ne vous interdit d'ailleurs, après lui avoir exposé le résultat, de lui demander : « Voulez-vous que je détaille le calcul (ou la preuve) ? »
3. Ne pas dire « On voit que » et ne surtout pas dire « On voit directement que » ni « clairement » ni « facilement »ni « immédiatement ».
4. On évitera de répéter « du coup »ou « de base ».
5. Si vous écrivez gros, ou en désordre, divisez votre tableau dès le début de l'oral. N'oubliez pas d'appuyer sur la craie.
6. Une indication de l'examinateur n'est pas un piège, ne pas en tenir compte est une bêtise et les bêtises font perdre des points.
7. On ne se précipite pas pour répondre à une question de l'examinateur : « Il faut tourner sept fois sa langue dans sa bouche avant de parler. »
8. Faire un dessin :
   — s'il est question de projection orthogonale ou de Pythagore ;
   — si vous voulez décrire une rotation autour d'un axe (cela vaut mieux que de faire des gestes) ;
   — si vous voulez décrire les propriétés d'une fonction comme « $\forall x \in \mathbb{R},\ |\mathrm{Arctan}(x)| \leq \pi/2$ », « $\forall x \geq 0,\ \sin(x) \leq x$ », « $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$ »ou « $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geq 1 + x$ »
   — si vous comparez série et intégrale ;
   — si vous voulez discuter la convergence d'une série entière en indiquant R et $-R$.
9. Ne pas dire « L'intégrale converge **quand** $x > 0$ » mais dire « **si** » ou « **si, et seulement si** ».
10. « Il faut que » ne signifie pas « il faut et il suffit que ».
11. $x < 0$ se dit « x est strictement inférieur à 0 »ou « x est strictement négatif » mais pas « x est inférieur à 0 »ni « x est négatif »
12. Ne pas dire « Chacun de ces événements est indépendant » mais « Ces événements sont indépendants » ou (ce n'est pas la même chose) « indépendants deux à deux ».
13. Ne pas dire : « ça converge »(l'intégrale, la suite, la série ?). Ne pas dire « La suite de fonctions converge »car une suite de fonctions converge simplement, voire uniformément. Ne pas dire « La série de fonctions converge »car une série de fonctions converge simplement voire uniformément voire normalement.
14. « L'union $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est disjointe »ne signifie pas « $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \cap F_{n+1} = \emptyset$ »mais signifie « $\forall i \neq j,\ F_i \cap F_j$ », autrement dit « les événements sont disjoints deux à deux »et non pas « chaque événement est disjoint de son successeur ».
15. « Soit i est une valeur propre, soit $-i$ l'est »est une manière (maladroite) de dire que « Ou bien i est une valeur propre, ou bien $-i$ l'est ». À ne pas confondre avec « i est une valeur propre ou $-i$ l'est ».
16. On compare les fonctions (positives) et non les intégrales pour conclure sur la convergence voire sur la comparaison des intégrales. Idem pour les suites et les séries.
17. En proba : d'abord les événements (est-ce une intersection ? d'événements indépendants ? ou une union ? disjointe ?), ensuite leur proba.
18. Les « éléments propres » d'une matrice = ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.