Oraux du 10 juin

Corentin Ouisse

Exercice 1. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}^{+*} \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{a_n + \sqrt{u_n}}$$

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. On suppose dans toute la suite de l'exercice que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel λ.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (on pourra démontrer par récurrence que $u_n \leq C$, en cherchant des conditions suffisantes sur C).
3. On note $\mathcal{V}(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{\lambda + \sqrt{x}}$.
   Montrer que $\mathcal{V}(u)$ est invariant par f, c'est-à-dire $f(\mathcal{V}(u)) = \mathcal{V}(u)$.
4. Etudier les solutions de l'équation $f(x) = x$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence. (on pourra introduire $\alpha = \inf \mathcal{V}(u)$ et $\beta = \sup \mathcal{V}(u)$)
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Solution **1.**

1. *On a* $a_n = u_{n+1}^2 - sqrtu_n$.
2. *On a* $a_n \leq A$ *donc* $u_{n+1} \leq \sqrt{A + \sqrt{u_n}}$ *; il suffit de prendre* $B \geq u_0$ *assez grand, de sorte que* $\sqrt{A + \sqrt{B}} \leq B$.
3. *si* $u_{\varphi(n)}$ *tend vers* l *alors* $u_{\varphi(n)+1}$ *tend vers* $f(l)$ *donc* $f(\mathcal{V}(u)) \subset \mathcal{V}(u))$.
   Réciproque : si $(u_{\varphi(n)})$ *tend vers* l *alors* $(u_{\varphi(n)-1})$ *est une suite extraite de* (u_n) *qui tend vers* $(l^2 - \lambda)^2 = l' \in \mathcal{V}$. *Comme* $l = f(l')$ *on a l'inclusion inverse.*
4. *Commençons par montrer que* f *admet un unique point fixe :*
   $$f(x) = x \iff x^2 = \sqrt{x} + \lambda \iff \sqrt{x}(x^{3/2} - 1) = \lambda$$
   avec $\lambda \geq 0$.
   L'application $g : x \mapsto x^2 - \sqrt{x} = \sqrt{x}(x^{3/2} - 1)$ *s'annule en* 0 *et en* 1, *est négative sur* $[0, 1]$ *et positive sur* $[1, +\infty[$. *le calcul de la dérivée*
   $$g'(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^{3/2} - 1}{2\sqrt{x}}$$
   montre que g *réalise une bijection de* $[1, +\infty[$ *dans* $[0, +\infty[$, *d'où l'unicité du point fixe pour* $\lambda > 0$.
   α *et* β *existe par Bolzano Weierstraß(toute suite bornée admet une suite extraite convergente) et prop de la borne inf/sup ;* α *et* β *sont sol de* $f(x) = x$ *car* f *est croissante et continue.*
   Si $\lambda > 0$ *alors* $f(x) = x$ *admet une unique solution donc* $\alpha = \beta$.
   Si $\lambda = 0$ *alors* $f(x) = x$ *admet deux solutions* 0 *et* 1 *; on montre que* $\alpha = 0$ *est absurde : s'il existe* $u_{n_0} \geq 1$ *alors* $u_n \geq 1$ *pour* $n \geq n_0$ *et si* $(u_n) \in]0, 1[^{\mathbb{N}}$ *alors* $u_{n+1} \geq u_n^{1/4} \geq u_n$ *donc* (u_n) *croît.*
5. *classique : supposons que* (u_n) *ne converge pas vers le point fixe* α, *alors il existe* $\varepsilon > 0$ *et une suite extraite* $(u_{\varphi(n)})$ *tels que* $|u_{\varphi(n)} - \alpha| \geq \varepsilon$, *mais la suite étant bornée, elle admet une valeur d'adhérence qui ne peut être* α, *donc c'est impossible et* (u_n) *converge vers* α.

Lilian Vault

Exercice 2. Soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2+...+t^n}}$.

1. Montrer que u_n est bien définie pour tout n. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que (u_n) converge vers $\dfrac{2}{3}$.
3. Montrer que un $u_n - \dfrac{2}{3} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{I}{n^\alpha}$ où I est un réel > 0 que l'on ne cherchera pas à calculer et $\alpha > 0$ est à déterminer.

Solution **2.**

1. *On sait que* $1+t+t^2+...+t^n = \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t}$ *donc converge simplement sur* $[0,1[$ *vers* $\dfrac{1}{1-t}$*. De plus l'intégrande est majorée par* 1 *donc le théorème de convergence dominée donne la convergence de* (I_n) *vers* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t}\,dt = \frac{2}{3}$.
2. *On calcule en posant* $t^{n+1} = u$ *(de classe* $\mathcal{C}^1$ *bijectif :*

$$I_n - \frac{2}{3} = \int_0^1 \sqrt{1-t}\left[\frac{1}{\sqrt{1-t^{n+1}}} - 1\right] dt = \int_0^1 \sqrt{1-t}\left[\frac{1-\sqrt{1-t^{n+1}}}{\sqrt{1-t^{n+1}}}\right] dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-t}\left[\frac{t^{n+1}}{\sqrt{1-t^{n+1}}\left(1+\sqrt{1-t^{n+1}}\right)}\right] dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-u^{1/(n+1)}}}{\sqrt{1-u}}\left[\frac{u^{1/(n+1)}}{1+\sqrt{1-u}}\right]\frac{du}{n+1}$$

Or pour $u \in]0,1]$ *fixé, on pose pour* $\alpha \in [0,1]$, $g_u(\alpha) = 1 - u^\alpha$*. La fonction* g_n *est dérivable et*

$$|g_u'(\alpha)| = \left|-\ln(u)e^{\alpha \ln u}\right| \leq -\ln u.$$

Donc

$$\left|(n+1)(1-u^{1/(n+1)})\right| \leq -\ln u$$

On en déduit la majoration

$$\sqrt{n+1}\times\left|\frac{\sqrt{1-u^{1/(n+1)}}}{\sqrt{1-u}}\left[\frac{u^{1/(n+1)}}{1+\sqrt{1-u}}\right]\right| \leq \frac{\sqrt{-\ln u}}{\sqrt{1-u}}\left[\frac{1}{1+\sqrt{1-u}}\right].$$

On en déduit par convergence dominée que

$$\lim_{n\to infinity} \sqrt{n+1}(n+1)\left(I_n - \frac{2}{3}\right) = \int_0^1 \frac{\sqrt{-\ln u}}{\sqrt{1-u}}\left[\frac{1}{1+\sqrt{1-u}}\right] du$$

ce qui montre (l'intégrande étant positive, l'intégrale est non nulle, que

$$I_n \sim_{n\to+\infty} \frac{C}{n^{3/2}}$$

Exercice 3. (*IMT-2023*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer qu'il existe $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ uniques tels que $(X-1)^n Q(X) + X^n P(X) = 1$.
2. Montrer que $P = (-1)^n Q(1-X)$.
3. Montrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $(X-1)Q' + nQ = \lambda X^{n-1}$.
4. En déduire Q.

Solution **3.** *Le cas $n = 1$ donne $Q = 1$ et $P = -1$. On suppose $n \geq 2$.*

1. *On peut utiliser le thérème de Bézout ou la bijectivité de l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X]$, qui à un polynôme Q associe le reste de la division euclidienne de $(X-1)^n Q$ par X^n.*
2. *On pose $Y = 1 - X$ dans $(X-1)^n P + X^n Q = 1$: $Y^n\left[(-1)^n Q(1-Y)\right] + Y^n\left[(-1)^n P(1-Y)\right] = 1$. Par unicité du couple (P, Q), on obtient $Q(X) = (-1)^n P(1-X)$ et $P(X) = (-1)^n Q(1-X)$.*
3. *On dérive l'expression $(X-1)^n P + X^n Q = 1$:*
$$(X-1)^n\left[(X-1)Q' + nQ\right] + X^{n-1}\left[XP' + nP\right] = 0.$$
Comme X^n et $(X-1)^n$ sont premiers entre eux, on en déduit que X^{n-1} divise $(X-1)Q' + nQ$. Comme Q est de degré au plus $n-1$, il existe tel $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que
$$(X-1)Q' + nQ = \lambda X^{n-1} \quad (*).$$
Ici, il est diffcile de déterminer la valeur de λ.
4. *En dérivant successivement la relation $(*)$ on obtient*
$$\forall k \in [\![0, n-2]\!],\ (X-1)Q^{(k+1)}(X) + (n+k)Q^{(k)}(X) = \lambda \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} X^{n-1-k}.$$
Dont on déduit $Q^{(k+1)}(0) = (n+k)Q^{(k)}(0)$.
De la relation définissant le polynôme Q, il vient $Q(0) = (-1)^n$, puis $Q^{(k)}(0) = \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!}(-1)^n$.
La formule de Taylor pour les polynômes nous permet de conclure :
$$Q(X) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} X^k.$$

Exercice 4. (*Mines-2023*) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$.

1. Montrer que $u_n \to +\infty$.
2. Donner un développement asymptotique à trois termes de u_n.

Exercice 5. (*Mines-2023*) Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x e^{t^2} \, \mathrm{d}t = F(x)e^{x^2}$.

Solution **4.**

1. *On a $u_n \geq \sqrt{n}$, donc (u_n) tend vers $+\infty$.*
2. *De plus,*
$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n + u_n} - \sqrt{n - 1 + u_{n-1}} = \frac{1 + u_n - u_{n-1}}{\sqrt{n + u_n} + \sqrt{n - 1 + u_{n-1}}}.$$
On en déduit que s'il existe N tel que $U_{N+1} - u_N \geq 0$, alors pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Comme la suite tend vers $+\infty$, elle est donc croissante à partir d'un certain rang.
D'autre part, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto n + x - x^2$. On a $f_n(u_n) = u_{n+1}^2 - u_n$.
L'étude de la fonction f_n montre que f_n est positive sur $[0, \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}]$ et négative sinon. On en déduit qu'à partir d'un certain rang, $\sqrt{n} \leq u_n \leq \frac{1+\sqrt{4n}}{2}$.
Par théorème d'encadrement des limites, on en déduit que $u_n \sim \sqrt{n}$.
Comme $u_n/\sqrt{n}$ tend vers 0, on en déduit
$$u_{n+1} = \sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{u_n}{n}} = \sqrt{n} \times \left(1 + \frac{u_n}{2n} + o\left(\frac{u_n}{2n}\right)\right) = \sqrt{n} + \frac{\sqrt{n} \times u_n}{2n} + o\left(\frac{\sqrt{n} \times u_n}{2}u_n\right),$$
qui donne $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$. On recommence en posant $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + \alpha_n$
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{\sqrt{n} + 1/2 + \alpha_n}{n}} \\ &= \sqrt{n} \times \left(1 + \frac{\sqrt{n} + 1/2 + \alpha_n}{2n} - \frac{(\sqrt{n} + 1/2 + \alpha_n)^2}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) \\ &= \sqrt{n} + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{8})\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right) \\ &= \sqrt{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right) \end{aligned}$$

Solution **5.** *On suppose $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle avec $P \wedge Q = 1$ solution de l'équation. En dérivant les deux parties de l'égalité, on obtient*
$$2xF + F' = 1 \iff 2xPQ + P'Q - Q'P = Q^2 \iff Q'P = Q(2xP - P' - Q)$$
Le mme de Gauss implique que $Q|Q'$, donc Q est un polynôme constant. De plus, par degré $2xP - P' = 0$ admet pour unique solution le polynôme nul.
Donc F ne peut s'écrire comme une fraction rationnelle.

Exercice 6. (*Mines-2023*) Soient A, B, C des variables aléatoires indépendantes telles que A suive la loi de Rademacher, et B et C la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Calculer la probabilité que le trinôme $AX^2 + BX + C^2$ admette deux racines réelles distinctes.
2. Calculer la probabilité que le trinôme $AX^2 + BX + C^2$ admette une unique racine réelle.
3. Calculer la probabilité que le trinôme $AX^2 + BX + C^2$ n'admette aucune racine réelle.
4. Cette dernière probabilité peut-être égale à $\frac{1}{2}$? Dans ce cas, donner une valeur approchée de p à 10^{-1} près.

Solution **6.**

1. *Notons* Δ *le discriminant du trinôme* $AX^2 + BX + C^2$. *Ce trinôme admet deux racines réelles distinctes si, et seulement si,* $\Delta > 0$. *De plus :*

$$\mathbb{P}(\Delta > 0) = \mathbb{P}(B^2 - 4AC^2 > 0) = \mathbb{P}(B^2 > 4AC^2)$$

Par la formule des probabilités totales, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B^2 > 4AC^2) &= \mathbb{P}(A=1)\ \mathbb{P}_{(A=1)}(B^2 > 4AC^2) + \mathbb{P}(A=-1)\ \underbrace{\mathbb{P}_{(A=-1)}(B^2 > 4AC^2)}_{=1} \\ &= \frac{1}{2}\ \mathbb{P}(B^2 > 4C^2) \\ &= \frac{1}{2}\ \mathbb{P}(B > 2C) + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Or, $(B > 2C) = \biguplus_{i=1}^{+\infty} (C = i) \cap (B > 2i)$. *Par indépendance des variables aléatoires, on en déduit* $\mathbb{P}(B > 2C) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(C = i)\ \mathbb{P}(B > 2i) = \sum_{i=1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1}\ (1-p)^{2i} = \frac{p(1-p)^2}{1-(1-p)^3}$. *On obtient finalement :*

$$\mathbb{P}(AX^2 + BX + C \text{ admette deux racines réelles distinctes}) = \frac{p(1-p)^2}{2(1-(1-p)^3)} + \frac{1}{2}$$

2. *On reprend les notations de la question précédente. Cette fois, il faut et il suffit que* $\Delta = 0$. *En utilisant la formule des probabilités totales de la même manière que précédemment, on trouve*

$$\mathbb{P}(\Delta = 0) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(B = 2C) + \frac{1}{2}\underbrace{\mathbb{P}_{(A=-1)}(B^2 = 4AC^2)}_{=0} = \frac{1}{2}\ \mathbb{P}(B = 2C)$$

En écrivant $(B = 2C) = \biguplus_{i=1}^{+\infty} (C = i) \cap (B = 2i)$, *puis par indépendance des variables, on trouve* $\mathbb{P}(\Delta = 0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1}\ p(1-p)^{2i-1}$. *Soit :*

$$\mathbb{P}(AX^2 + BX + C \text{ admette une unique racine réelle}) = \frac{p^2(1-p)}{2(1-(1-p)^3)}$$

3. *Cela revient à calculer* $\mathbb{P}(\Delta < 0)$. *Or* $\mathbb{P}(\Delta < 0) = 1 - \mathbb{P}(\Delta = 0) - \mathbb{P}(\Delta > 0)$. *D'après les deux questions précédentes :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(AX^2 + BX + C \text{ n'admette aucune racine réelle}) &= \frac{1}{2} - \frac{p(1-p)^2}{2(1-(1-p)^3)} - \frac{p^2(1-p)}{2(1-(1-p)^3)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{(1-p)}{2 \times (1 + (1-p) + (1-p)^2)}\end{aligned}$$

4. *D'après la question précédente, comme* $p \in]0,1[$, *ce n'est pas possible.*

$$\mathbb{P}(\Delta < 0) = \frac{1}{2} \text{ est impossible}$$

Exercice 7. (*Mines-2023*)

1. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{g\in G} \operatorname{tr} g = 0$. Montrer que $\sum_{g\in G} g = 0$.
2. Soient G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par tous les éléments de G. Montrer que V admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G.

Exercice 8. Déterminer tous les couples $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant : $3^m = 8 + n^2$.

Solution **7.**

1. *Posons* $P := \frac{1}{|G|}\sum_{M\in G} M$. *Pour tout* $N \in G$, *la translation* $M \mapsto NM$ *est bijective. Par conséquent* $P^2 = \frac{1}{|G|^2}\sum_{N\in G}\sum_{M\in G} NM = \frac{1}{|G|^2}\sum_{N\in G}\sum_{M\in G} M = P$, P *est un projecteur !*
   La trace d'un projecteur étant égale à son rang on a par linéarité
   $$\sum_{M\in G} tr(M) = |G| rg(P)$$
   d'où le résultat demandé.
2. *Notons* $< .,. >$ *le produit scalaire canonique sur* $\mathbb{R}^n$ *et posons*
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ (x|y) = \sum_{g\in G} < gx, gy > .$$
   $(\ |\ )$ *est clairement bilinéaire symétrique positive, soit* $x \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $(x|x) = \sum_{g\in G} ||gx||^2 = 0$ *on a donc* $gx = 0$ *et* $x = 0$ *car* g *est inversible. On a donc bien défini un produit scalaire.*
   De plus, pour tous $h \in G$, $(hx|hy) = (x|y)$ *car la translation* $g \in G \mapsto gh$ *est bijective. Ainsi* G *est inclus dans le groupe orthogonal de* $\mathbb{R}^n$ *relativement à ce produit scalaire.*
   Pour une isométrie vectorielle l'orthogonal d'une partie stable est encore stable donc l'orthogonal de V *relativement à notre produit scalaire convient est stable par chacun des éléments de* G *et donc convient.*

Solution **8.** *On cherhce à résoudre* $3^m - n^2 = 8$. *On remarque que* n *est impair, car* 3^m *est impair.*
Dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, *la classe de* $(2k+1)^2$ *vaut celle de* 1. *Donc la classe de* 3^m *vaut aussi celle de* 1, *il vient* m *pair, car* $3^{2k+1} = 9^k \times 3$ *est celle de* 3.
On peut donc écrire l'équation sous la forme
$$(3^{m/2} - n)(3^{m/2} + n) = 8$$
On en déduit que la seule solution est $(m, n) = (2, 1)$.

Exercice 9. Soit $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$ une matrice aléatoire où $(a+1) \sim \mathcal{P}(\alpha), (b+1) \sim \mathcal{P}(\beta), (c+1) \sim \mathcal{P}(\gamma)$ et $(d+1) \sim \mathcal{P}(\delta)$.

1. Calculer la probabilité que la matrice M soit inversible.
2. Calculer la probabilité que la matrice M soit inversible et diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Soit $A = \{n \in \mathbb{N}, 2^n + 1 \equiv 0[n]\}$.

1. Montrer que 3 est l'unique nombre premier appartenant à A.
2. Montrer que A contient toutes les puissances entières de 3 .

Solution **9.**

1. *On pose les matrices* $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$.
   On a $M(a,b,c,d) = a\,I_4 + b\,B + c\,C + d\,D$. *On vérifie que l'ensemble des* $M(a,b,c,d)$ *forment une* $\mathbb{R}$*-algèbre :*

	B	C	D
B	$-I_4$	$-D$	C
C	D	$-I_4$	$-B$
D	$-C$	B	$-I_4$

   Le produit de deux éléments est antisymétrique : on en déduit que
   $$(bB + cC + dD)^2 = b^2B^2 + c^2C^2 + d^2D^2 = -(b^2 + c^2 + d^2)I_4.$$
   Ainsi,
   $$M(a,b,c,d)M(a,-b,-c,-d) = a^2I_4 - (bB + cC + dD)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4.$$
   On déduit que $M(a,b,c,d)$ *est inversible si et seulement si* $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$. *Comme* $M(a - b, -c, -d) = M(a,b,c,d)^T$, *on obtient aussi* $\det(a,b,c,d) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.
   Par hypothèse, $\mathbb{P}(a = 0) = \mathbb{P}(a+1 = 1) = e^{-\alpha}$. *En supposant les variables aléatoires indépendante, on obtient* $\mathbb{P}(M \text{ inversible}) = 1 - e^{-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}$.
2. *Si la matrice* $M(a,b,c,d)$ *est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$, *alors son polynôme carcatéristique* $\chi = ((X - a)^2 + b^2 + c^2 + d^2$ *est scindé, donc possède au moins une racine réelle : on en déduit que* $b = c = d = 0$ *et alors c'est la matrice d'une homothétie, donc digonale. Ainsi,* $M(a,b,c,d)$ *est diagonalisable et inversible si et seulement si* $a \neq 0$ *et* $b = c = d = 0$. *La probabilité d'un telle événement est donc* $(1 - e^{-\alpha}) \times e^{-(\beta+\gamma+\delta)}$.

Solution **10.**

1. *On a* $2^3 + 1 = 9 = 0 \mod 3$. *Donc* $3 \in A$.
   Soit p *un nombre premier différent de* 3.
   Si $p = 2$ *alors* $2^2 + 1 = 5 = 1 \mod 2$ *donc* p *n'appartient pas à* A.
   Si $p \geq 3$ *alors le petit théorème de Fermat nous indique que* $2^p = 2$ *mod* p *ainsi on obtient que* $2^p + 1 = 3$ *mod* p *donc* p *n'appartient pas à* A.
   Ainsi 3 *est l'unique nombre premier appartenant à* A.
2. *la proposition* $\mathcal{P}(n)$ *est* $2^{3^m} + 1 \equiv 0[3^m]$. *Pour* $m = 1$, $8 + 1 \equiv 0[3]$. *Si* $2^{3^m} + 1 = 3^m \times k$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$, *alors*
   $$2^{3^{m+1}} = (2^{3^m} + 1 - 1)^3 = (3^m \times k - 1)^3 = k^3 \times 3^{3m} - 3 \times k^2 \times 3^{2m} + 3 \times k \times 3^m - 1,$$
   dont on déduit que $2^{3^{m+1}} \equiv -1[3^{m+1}]$. *La proposition* $\mathcal{P}(n)$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.