Oraux du 17 juin

Titouan Plaisir

Exercice 1. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1$.

On lui associe l'application $f : x \to \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.

1. Montrer que f est définie et indéfiniment dérivable sur $I =]-1, 1[$.
2. Montrer que f est continue à gauche de 1.
3. Montrer que f est croissante sur $[0, 1]$ et convexe sur $[0, 1[$.
4. On suppose que $f(0) = 0$.
   Montrer que l'on a l'une des deux situations suivantes :
   (a) $\forall x \in [0, 1] f(x) = x$ ou
   (b) $\forall x \in]0, 1[f(x) < x$
5. On suppose que $f(0) > 0$.
   Montrer que l'équation $f(x) = x$ a au plus une solution dans $]0, 1[$.
6. Désormais, f est notée f_u.
   On note E l'ensemble des suites u positives telles que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1$.
   Soit u et v deux suites de E.
   On note $u * v = w$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.
   (a) Montrer que w est dans E.
   (b) Montrer que $*$ est associative et qu'elle a un neutre. Préciser ce neutre.
   (c) Soit α un réel dans $]0, 1[$. On pose $a_n = (1 - \alpha)\alpha^n$.
   Soit $q \in \mathbb{N}$. On note a^q la suite a composée q fois avec elle-même pour la loi $*$: $a^q = a*a*\cdots*a$.
   Calculer $(a^q)_n$ en fonction de q, α et n.

Solution **1.** 1. *CV en* 1 : $R \geq 1$.

2. *CVN sur* $[0,1]$
3. *Monotonie et convexité conservée par CVS sur* $[0,1]$.
4. *On fait deux cas selon que* $u_1 = 1$ *ou* $u_1 \neq 1$.

   Dans le deuxième cas : $x - f(x) = \sum_{2}^{\infty} (x - x^n)u_n > 0$ *car l'un au moins des* u_n *est* > 0 *quand* $n \geq 2$.
5. *On pose* $g(x) = f(x) - x$. *Puis étude des variations via le signe de* g". *On fait deux cas selon le signe de* $g'(1)$: *si* $g'(1) \leq 0$, *pas de solution et sinon, une solution.*
6. (a) *Propriétè du produit de Cauchy.*

   (b) *Conséquence des propriétés du produit de fonctions et de l'unicité du développement en série entière avec* $f_{u*v} = f_u f_v$ *sur* $]-1,1[$ *par convergence absolue.*

   (c) *On a bien* $R = \dfrac{1}{\alpha} > 1$. *On peut utiliser ce qui précède :*

   $f_{a^q}(x) = (\dfrac{1-\alpha}{1-\alpha x})^q$. *On développe en série entière.*

   $(a^q)_n = (1-\alpha)^q \alpha^n \dbinom{n+q-1}{n}$.

Exercice 2. (*Mines-2023*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :
i) l'unique valeur propre de A est 1 ,
ii) $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\left(A^2\right) = \cdots = \operatorname{tr}\left(A^n\right) = n$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite décroissante de réels positifs. On pose, pour $n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{1}{1+n^2 u_n}$.
Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ diverge.

Solution **2.** *L'implication directe est absolument trivialissime car les valeurs propres des puissances de A sont toujours* 1.
Pour la réciproque, considérons le prédicat suivant sur $\mathbb{N}^*$,

$$H(n) : \text{"pour tous } \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}, \text{ si } \sum_{i=1}^n \lambda_i = ... = \sum_{i=1}^n \lambda_i^n = n \text{ alors } \lambda_1 = ... = \lambda_n = 1\text{"}$$

Pour $n = 1$, *il n'y a pas grand chose à faire.*
Prenons maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ *et supposons* $H(n)$.
Soient $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1} \in \mathbb{C}$ *tels que* $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = ... = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{n+1} = n + 1$.
Posons $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1})$. *Si* $P = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, *on a par linéarité*

$$tr(P(D)) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k tr(D^k) = (n+1) \sum_{k=0}^{n+1} a_k = (n+1)P(1).$$

En particulier pour $P = \chi_D$, *on obtient* $\chi_D(1) = 0$ *d'après Cayley - Hamilton. Ceci impose donc (quitte à renumméroter) que* $\lambda_{n+1} = 1$. *Par conséquent en soustrayant* λ_{n+1} *dans chaque terme on a* $\sum_{i=1}^n \lambda_i = ... = \sum_{i=1}^n \lambda_i^n = n$ *et donc par hypothèse de récurrence* $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 1$. *Ceci montre* $H(n + 1)$.
Par récurrence, l'implication réciproque en découle.

Autre solution *La matrice est trigonalisable. Soit* $Spec(A) \setminus \{0\} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ *avec* α_i *de multiplicité* n_i. *On pose* $\alpha_0 = 0$. *On a*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_r \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^r & \cdots & \alpha_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On reconnaît une matrice de Vandermonde. Le système $A^T X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. *pour unique solution le vecteur X de coordonnées, les coordonnées du polynôme* L_i *de degré r tel que* $L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j}$ *pour* $j \in [\![0, r]\!]$. *C'est-à-dire les polynôme interpolateur de Lagrange pour* $(\alpha_i)_{i \in [\![0,r]\!]}$. *On en déduit l'inverse de la matrice A,* $A^{-1} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \hline \vdots \\ \hline L_r \end{pmatrix}$. *où la ligne i correspond aux coordonnées de* L_i *dans la base canonique (inversion classique d'une matrice de Vandermonde). On en déduit*

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} = nA^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \iff \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \iff \forall i \in [\![1, r]\!],\ L_i(1) = \frac{n_1}{n}.$$

Donc $\sum_{i=1}^r L_i(1) = 1$. *mais par définition des polynômes interpolateurs,* $\sum_{i=0}^r L_i = 1$. *Donc* $L_0(1) = 0$, *ce qui signifie que l'un des* α_i *vaut* 1, *mais alors* $L_i(1) = 1$ *implique* $n_i = n$. *On en déduit que* 1 *est l'unique valeur propre de multiplicité n.*

Solution **3.** *On suppose que* $\sum Vn$ *converge donc en particulier* $\lim_{n \to +\infty} Vn = 0$ *donc* $\lim_{n \to +\infty} n^2 Un = +\infty$. *Ainsi :* $Vn \sim \frac{1}{n^2 Un}$ *et avec Cauchy-Schwarz :*

$$\sum \frac{1}{n} = \sum \left(\frac{1}{n\sqrt{Un}} \times \sqrt{Un} \right) \leq \sum \frac{1}{n^2 Un} \times \sum Un$$

Or $\sum \frac{1}{n}$ *diverge et* $\sum \frac{1}{n^2 Un}$ *est de même nature que* $\sum Vn$ *qui converge. Par l'absurde, si* $\sum U_n$ *converge, par comparaison de séries à termes positifs, on aurait que* $\sum \frac{1}{n}$ *converge : absurde.*
D'où le résultat : Σ *Un diverge.*

Exercice 4. Soit $n \geq 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les rangs de A et A^2.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement représenté par la matrice A.
   Montrer que $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n$.
3. En déduire que la matrice A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B \in Gl_2(\mathbb{R})$.
4. Calculer $\operatorname{tr} B$ et $\operatorname{tr} B^2$. En déduire les valeurs propres de B puis celle de A.
5. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5. * Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta.$$

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle

$$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0.$$

Solution **4.**

1. *Le rang de A et de A^2 est 2. Remarquons que $A^3 = A$, ce qui termine l'exercice, suivons les consignes.*
2. *On sait qu'alors $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$ (le théorème du rang plus intersection réduite à 0 car f induit une bijection de $\operatorname{Im} f$ dans $\operatorname{Im} f^2$).*
3. *On prend une base du noyau de f que l'on complète en une base de $\operatorname{Im} f$ et la matrice dans cette base est celle proposée, car f de rang 2 donc B inversible.*
4. *La trace est invariante par changement de bases et $\operatorname{tr} A = 0$, $\operatorname{tr} A^2 = 2$, donc on a le même résultat pour B.*
   Le polynôme χ_B est scindé sur $\mathbb{C}$ et la somme des racines $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha^2 + \beta^2 = 2$. $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$ implique $\alpha = -\beta$ et ensuite $\alpha = \pm 1$. Donc B admet deux valeurs propres réelles distinctes 1 et -1.
5. *On en déduit que B et A sont diagonalisables.*

Solution **5.**

1. *Posons $u(x,\theta) = \cos(x \sin\theta)$, définie sur $\mathbb{R} \times [0,\pi]$. u est de classe C^∞, ses dérivées partielles du premier et second ordre par rapport à x étant*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\theta) = -\sin(\theta)\sin(x\sin\theta) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin^2(\theta)\cos(x\sin\theta).$$

   On vérifie bien que ces dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R} \times [0,\pi]$, ce qui, par théorème d'intégration sur un segment, implique que f est de classe C^2. On en déduit

$$f'(x) = \int_0^\pi -\sin(\theta)\sin(x\sin\theta)d\theta,\ f''(x) = \int_0^\pi -\sin^2(\theta)\cos(x\sin\theta)d\theta.$$

2. *Utilisant $-\sin^2\theta = \cos^2\theta - 1$, on a*

$$xf''(x) + xf(x) = \int_0^\pi x\cos^2\theta\cos(x\sin\theta)d\theta = \int_0^\pi \cos\theta \times \big(x\cos(\theta)\cos(x\sin\theta)\big)d\theta.$$

   On réalise alors une intégration par parties dans cette dernière intégrale, pour trouver

$$xf''(x) + xf(x) = -f'(x).$$

Exercice 6. (*Mines-2023*) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable telle que : i) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f(x)$ est injective ; ii) $\|f(x)\| \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|f(x) - a\|^2$.

1. Calculer $\mathrm{d}g$.
2. Montrer que g admet un minimum.
3. En déduire que f est surjective.

Solution **6.**

1. *Soit* $x, h \in \mathbb{R}^n$, $g(x+h) - g(x) = \langle f(x+h) - a | f(x+h) - a\rangle - \langle f(x) - a | f(x) - a\rangle$ *on écrit :* $f(x+h) = f(x) + df(x)h + \wr(h)$ *et on utilise a linéarité du produit scalaire pour :* $g(x+h) - g(x) = \langle f(x) + df(x)h + \wr(h) - a | f(x) + df(x)h + \wr(h) - a\rangle - \langle f(x) - a | f(x) - a\rangle = 2\langle df(x)h | f(x) - a\rangle + \wr(h)$
   Ainsi, $dg(x)(h) = 2\langle df(x)h | f(x) - a\rangle$.
2. *Soit* $x \in \mathbb{R}^n$, *avec une inégalité triangulaire :* $g(x) \geq (||f(x)|| - ||a||)^2$ *Donc par comparaison, et par ii :* $g(x) \longrightarrow_{||x|| \to +\infty} +\infty$
   Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ *tel que ,* $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $||x|| \geq M$ *alors* $g(x) \geq g(0) + 1$. *Donc, si* g *atteint un minimum, il l'atteint sur le fermé borné* $A = \{x \in \mathbb{R}^n |, ||x|| \leq M\}$. *Or étant continue par théorème généraux,* g *est borné est atteint ses bornes sur* A, *donc sn minimum.*

   Ainsi, g *admet un minimum en* x_m.
3. *En* x_m, *comme* g *admet un minimum :* $dg(x_m) = 0$. *Donc, pour tout* $h \in \mathbb{R}^n$, $2\langle df(x_m)h | f(x_m) - a\rangle = 0$ *Ainsi, comme on a ce résultat pour tout* h *:*
   Soit $f(x_m) - a \neq 0$ *et alors l'image de* $df(x_m)$ *est dans* $(f(x_m) - a)^{\perp}$ *, mais ce n'est pas possible car selon i,* $df(x_m)$ *est injective donc surjective.*
   On en déduit $f(x_m) - a = 0$ *et donc* f *est surjective.*

Exercice 7. (*Mines-2023*)

1. Déterminer le rayon de convergence de $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} z^k$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Calculer $\exp(f(z))$. Ind. Considérer $t \in [0,1] \mapsto \exp(f(tz))$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'existence de $\alpha > 0$ tel que :
   $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant \alpha \Rightarrow \det(I_n + zA) = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{tr}\left(A^k\right) z^k\right)$.

Solution **7.**

1. *En posant :* $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, (a_n) *ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, on peut appliquer la règle de d'Alembert :* $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{n+1}{n}| = 1$ *, d'où* $R = 1$.

2. *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *avec* $|z| < 1$*, et* $t \in [0,1]$*. Considérons* $y : t \mapsto exp(f(tz))$*. On a donc y dérivable comme composée de fonctions qui le sont (*$f \in C^\infty$ *développable en série entière donc on peut dériver terme à terme), et alors :*

$$y'(t) = zf'(zt)exp(f(zt)) = z(\sum_{k=1}^{\infty}(-zt)^k)y(t) = \frac{z}{1+zt}y(t).$$

On obtient donc l'équation différentielle suivante : $y'(t) - \frac{z}{1+zt}y(t) = 0$ (E).
L'équation différentielle étant à coefficients complexes, on cherche à trouver y par analyse synthèse :
Analyse : *On va d'abord supposer que* $z \in \mathbb{R}$*. Alors :* $y : t \mapsto \lambda exp(ln(1+zt)) = \lambda(1+zt)$ *On prend alors* $\lambda = 1$ *et on va tester si la solution fonctionne pour* $z \in \mathbb{C}$.
Synthèse : *Considérons* $y : t \mapsto 1 + zt$ *avec* $z \in \mathbb{C}$*. Alors :* $y' : t \mapsto z$ *D'où :*

$$y'(t) - \frac{z}{1+zt}y(t) = z - \frac{z}{1+zt}(1+zt) = 0$$

et alors y vérifie bien l'équation différentielle à coefficients complexes (E).
Finalement, on en déduit que $exp(f(z)) = y(1) = 1 + z$.

3. *Sachant que* $\mathbb{C}$ *est algébriquement clos, A est trigonalisable et alors on note* $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n}$ *ses coefficients de la diagonale.*
Alors, d'une part : $det(I_n + zA) = \prod_{i=0}^{n}(1 + z\lambda_i)$.
D'autre part : $tr(A^k) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^k$ *et pour que* $f(z\lambda_i)$ *soit définie, il faut que :* $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $|z\lambda_i| \leq 1$ *donc* $|z| \leq \frac{1}{|\lambda_i|}$*, d'où :* $0 \leq |z| \leq \dfrac{1}{\max_{i\in[\![0,n]\!]} |\lambda_i|} = \alpha$.

$$\begin{aligned}
\exp(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} tr(A^k)z^k) &= \exp((\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^k z^k) \\
&= \prod_{i=0}^{n} \exp((\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}(\lambda_i z)^k) \\
&= \prod_{i=0}^{n} \exp(f(\lambda_i z)) \\
&= \prod_{i=0}^{n} (1 + \lambda_i z) \\
&= \det(I_n + zA)
\end{aligned}$$

Finalement, il existe bien $\alpha > 0$ *tel que :* $exp(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} tr(A^k)z^k) = \det(I_n + zA)$.

Exercice 8. Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt$.

1. Déterminer la limite l de la suite (I_n).
2. Trouver un équivalent de $l - I_n$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$.
4. Donner un développement asymptotique à trois termes de I_n.

Solution **8.**

1. *Le théorème de convergence dominée (on domine par la fonction constante* 1*) donne immédiatement que la limite de* I_n *vaut* 1*.*
2. *Une intégration par partie donne*

$$1 - I_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^n}\right) dt = \frac{1}{n}\int_0^1 t \times \frac{nt^{n-1}}{1+t^n}\, dt = \frac{1}{n}\left([t\ln(1+t^n)]_0^1 - \int_0^1 \ln(1+t^n)\, dt\right)$$

Or

$$0 \le \int_0^1 \ln(1+t^n)\, dt \le \int_0^1 t^n\, dt \le \frac{1}{n+1}$$

d'où $1 - I_n = \dfrac{\ln 2}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})$*.*

3. *On a* $\dfrac{\ln(1+y)}{y} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^k$*. La série étant alternée, on vérifie avec la majoration du reste par le premier terme que la convergence est uniforme. On peut donc intervertir série et intégrale, ce qui donne le résultat attendu*

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = K.$$

4. *D'après la question 2, il faut trouver un développement à l'ordre* 1 *de*

$$J_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\, dt$$

Pour cela, on pose $u = t^n$*, changement de variable* $\mathcal{C}^1$ *bijectif sur* $[0,1]$

$$J_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\, u^{1/n}\, du = \frac{1}{n} K_n.$$

La fonction $u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ *se prolonge par continuité sur* $[0,1]$*. Le théorème de convergence dominée (avec* $|u^{1/n}| \le 1$*) montre que*

$$\lim_{n\to+\infty} K_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\, du = K = \sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^2} - 2\sum_{n\ge 1} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

On en déduit que

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Exercice 9. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme euclidienne canonique.
On pose $f : M \in E \mapsto \|M\|^2 = \operatorname{tr}\left(M^T M\right)$ et $g : M \in E \mapsto \det M - 1$. On note h la restriction de f à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer leur gradient en une matrice $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que f admet un minimum sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Soit M_0 une matrice où il est atteint.
3. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale au gradient de g en M_0. Montrer qu'il existe un chemin γ de classe $\mathcal{C}^1$ défini sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\gamma(0) = M_0$ et $\gamma'(0) = H$.
4. Montrer que $\left(\nabla f_{M_0}\right)^{\perp} = \left(\nabla g_{M_0}\right)^{\perp}$.
5. Calculer le minimum de h sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Solution **9.**

1. *f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme fonctions polynomiales en les coefficients de la matrice.* *Soit $M \in SL_n(\mathbb{R})$, $H \in M_n(\mathbb{R})$,*
$$f(M+H) = tr((M+H)^T(M+H)) =$$
$$tr(M^TM) + tr(M^TH + H^TM) + tr(H^TH) =$$
$$tr(M^TM) + tr(M^TH + H^TM) + ||H||^2 =$$
$$f(M) + tr(M^TH + H^TM) + o||H||$$
Ainsi,
$$df(M)(H) = tr(M^TH + H^TM) = < \nabla f(M), H >$$
$$< \nabla f(M), H >= tr(M^TH + H^TM) = < 2M, H >$$
Le résultat étant vrai $\forall H \in M_n(\mathbb{R})$,
$$\nabla f(M) = 2M$$
On pose $M = (C_1|\cdots|C_n)$
$$g'_{E_{i,j}}(M) = \lim_{t\to 0} \frac{\det(M + tE_{i,j}) - \det(M)}{t} = \det(C_1|\cdots|\underset{j}{E_{i,j}}|\cdots|C_n) = [Com(M)]_{i,j}\ ,$$
le cofacteur (i,j) de M. Ainsi $\nabla g(M) = Com(M)$. Cette formule est vraie pour tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$. *Pour $M \in SL_n(\mathbb{R})$, on a $\nabla g(M) = Com(M) = (M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$.*
2. *Soit h la restriction de f sur $SL_n(\mathbb{R})$, soit $M \in SL_n(\mathbb{R})$, l'intersection*
$$A = SL_n(\mathbb{R}) \bigcap B_f(0, ||M||^2)$$
est un compact car $SL_n(\mathbb{R})$ est un fermé comme image réciproque de $\{1\}$ par l'application continue $M \mapsto det(M)$ et admet donc un minimum par h. Réciproquement, si M_0 est un minimum de $SL_n(\mathbb{R})$, $h(M_0) \leq h(M)$ donc $M_0 \in A$
f admet donc un minimum sur $SL_n(\mathbb{R})$
3. *On pose $X = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ g(M) = 0\} = SL_n(\mathbb{R})$, ainsi $\nabla g(M_0)$ est un vecteur normal à l'espace tangent à X en M_0 non nul, si $\nabla g(M_0) = Com(M_0) = 0$, $M_0 = 0$ ce qui n'est pas le cas car $det(M_0) = 1$*
Comme $< H, \nabla g(M_0) >= 0$, H appartient à l'espace tangent à X en M_0, le cours nous donne donc l'existence d'une telle application γ
4. *C'est un résultat du théorème d'optimisation sous contrainte : La restriction h de f sur $X = SL_n(\mathbb{R})$ admet un minimum en M_0, $dg(M_0) : H \mapsto tr(Com(M_0)^TH)$ est non nulle et est donc colinéaire à $df(M_0) : H \mapsto tr(2M_0^TH)$*
Ainsi, en procédant par équivalence,
$$H \in (\nabla f(M_0))^\perp \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{tr}\,(2M_0^TM) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda\,\mathrm{tr}\,(Com(M_0)^TH) = 0 \Leftrightarrow$$
$$H \in (\nabla g(M_0))^T$$
Ainsi,
$$(\nabla g(M_0))^T = (\nabla f(M_0))^T$$
5. *Avec les résultats précédents on obtient que*
$$(M_0)^\perp = (M_0^{-1})^T)^\perp$$
Ainsi les matrices M_0 et $(M_0^{-1})^T$ sont colinéaires, $\alpha(M_0^{-1})^T = M_0$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$. $h(M_0) = tr(M_0^TM_0) = tr(\alpha M_0^{-1}M_0) = \alpha n$, et $1 = det(M_0)det((M_0^{-1})^T) = \alpha^n$, ainsi $\alpha = \pm 1$ mais $h(M_0) \geq 0$ donc $\alpha = 1$ h admet donc un minimum sur $SL_n(\mathbb{R})$ en n, une matrice où il est atteint est I_n

Exercice 10. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

1. Montrer que $|\operatorname{rg}(u)-\operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v)$.
2. Soient F un sous-espace vectoriel de E, G et H deux supplémentaires de F. On note p (resp. q) la projection sur $F($ sur H) parallèlement à G (à F).
   Montrer que $\operatorname{rg}(p+q)=\operatorname{rg} p+\operatorname{rg} q$.

Exercice 11. (*mines-2023*) Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle décroissante de réels strictement positifs, telle que $a_0=1$. On pose $b_n=\sum_{k=1}^n\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{a_k}$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $b_n \in [0,1[$ pour tout $n \geqslant 1$.
2. On fixe $\ell \in [0,1]$. Montrer que l'on peut choisir la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ de telle sorte que $b_n \rightarrow \ell$.

Solution **10.**

1. **Inégalité de droite :** *On a* $Im(u+v) \subset Im(u) + Im(v)$, *donc* $rg(u+v) \leq dim(Im(u)+Im(v)) = rg(u) + rg(v) - dim(Im(u) \cap Im(v))$ *(formule de Grassmann).*
En particulier, on a bien $rg(u+v) \leq rg(u) + rg(v)$
Inégalité de gauche : *On remarque que montrer* $rg(u) - rg(v) \leq rg(u+v)$ *suffit pour montrer le résultat, de par le rôle symétrique de* u *et de* v*. On a :*
$$rg(u) = \underbrace{rg(u+v-v) \leq rg(u+v) + rg(-v)}_{\textit{inégalité de droite}} = rg(u+v) + rg(v)$$
D'où $rg(u) - rg(v) \leq rg(u+v)$*, et on a le résultat.*
2. *Déjà, on a* $\underbrace{F}_{Im(p)} \oplus G = E \qquad F \oplus \underbrace{H}_{Im(q)} = E$ *On a donc* $rg(p) = dim(F)$ *et* $rg(q) = dim(H)$*, donc* $rg(p)+rg(q) = dim(F)+dim(H) = n \leq rg(p+q) \leq n$*, d'où, comme voulu,* $rg(p+q) = rg(p)+rg(q)$.

Solution **11.**

1. *On pose* $c_n = \frac{1}{a_n}$ *qui définit une suite décroissante avec* $c_0 = 1$ *convergeant vers* $\alpha \in [0,1]$*. Ainsi*
$$0 \leq b_n = \sum_{k=1}^{n} (1 - \frac{c_k}{c_{k-1}}) c_k = \sum_{k=1}^{n} (c_{k-1} - c_k) \frac{c_k}{c_{k-1}} \leq \sum_{k=1}^{n} (c_{k-1} - c_k) = 1 - c_n \leq 1$$
2. *La suite des sommes partielles* b_n *est majorée et à termes positifs, donc la suite* (b_n) *est convergente. Soit* $\ell \leq 1 - \alpha$ *sa limite. On a* $\ell \in [0,1]$*. Si* $\ell = 1$*, alors* (c_n) *tend vers* 0 *et*
$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} (c_{k-1} - c_k) - \sum_{k=1}^{n} (c_{k-1} - c_k) \frac{c_k}{c_{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} (c_{k-1} - c_k) \left[1 - \frac{c_k}{c_{k-1}} \right]$$
doit tendre vers 0*. Comme la série est à terme positif, chaucun des termes doit être nul, et donc* c_k *est la suite constante. Mais alors* $b_n = 0$ *pour tout* n*. Donc* $\ell \neq 1$*.*
Si $c_k = \frac{1}{q^k}$ *pour* $k \in \mathbb{N}$ *et* $q \in]0,1[$*, alors*
$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (1-q) q^k \underset{n \to +\infty}{\to} q.$$
Si c_k *est constante la limite de la suite* (b_n) *vaut zéro. On a donc montré que toutes les valeurs de* $[0,1[$ *s'écrive comme la limite d'une suite* b_n*.*