Exercices corrigés d'oraux de mathématiques

Sélection d'énoncés rapportés d'oraux donnés aux concours et classés par thèmes

Les exercices suivants sont corrigés :

Corentin 25+CCP2 / Lilian 46+CCP77 / Gabin 17+CCP4 / Carla 66+CCP71 / Aurelio 67+CCP73 / Romain 43+48 // Anis 1+CCP6 / Younick 83+CCP111 / Arthur E 2+CCP14 / Simon P 5 +CCP98 / Lancelot 88 +CCP111 / Valentin 87+CCP60 // Iba 10+CCP30 / Anne-lise 6+CCP32 / Raphaëlle 23+CCP28 / Raminia 22+CCC42 / Alexis 26+CCP49 / Yann 24+CCP49 // Mathias 23+CCP16 / Titouan 27+CCP17 / Theodoris 72+CCP67 / Louis 105+116 / Thomas M 90+CCP66 / Noémie 129+CCP76 // Romain 59 / Simon T CCP25+CCP53 / Amaury 7+CCP38 / Pierre 14+89 / Ewen 36+CCP35 /Alex 92+CCP34 // Iba 131+CCP27 / Carla 128+CCP57 / Corentin 133 / Maxence CCP103+33 / Théo 120+CCP55 / Ewen 135 // Iba 96 / Gabin 80+CCP62 / Thomas LD 79+CCP60 / Arthur L 91+CCP59 / Malo 15+CCP18 / Maxence 16+CCP56 // Mathis 121+CCP28 / Maxime 55+CCP40 / Yann 54+CCP39 / Arthur L 71+CCP71/ Theodoris 76+CCP64 / Salif 81+CCP66 / Anis 102+CCP80 / Alexandre 64+CCP81 / Lilian 51+CCP94 / Thomas M 103+CCP78 / Romain 117 // Carla 21 /Pierre 19+CCP17 / Titouan 20+CCP58 / Alexis 29 / Mathias B 18+CCP37 / Louis 31 / Alex 57+56 / Arthur E 53 / Malo 61 / Matthias B 12+CCP7 / Raminia 35 / Amaury 38+CCP9 // Romain 63 / Silmon P 98 / Aurelio 61+68 / Noémie 65+32 / Simon T 29 / Younick 32+CCP8 / Valentin 69 / Anis Simon P 41+CCP5 / Iba 118 / Ewen 60 // Anis 93+CCP68 / Malo 94+CCP84 / Lilian 31 / Yann 97+CCP95 / Romain 132 // Lilian 11 / Maxence 9+CCP10 / Eliott 34 // Anne-Lise 8 / Pierre 49 / Corentin 50 / Romain 113+114 / Louis 132 / Theodoris 13 / Mathias B 82 / Raphaelle 28 / Salif 37 // 108+CCP41 / Lancelot 78 / Eliott 86 / Raphaelle 85 / Lilian 42 // Anis 109 / Arthur L 110+3 / Yann 124 / Timéo 112+4 / Théodoris 40 / Ewen 111 / Gabin 75 // Mathis 127+107 / Loïs 99+52 / Maxence 39+70 / Alexandre 41 / Simon P 44+77 / Mathias B 95 / Salif 125 / Timéo 104 / Noémie 106 / Alex 100 / Valentin 122 // Gabin 45 / Maxime 62+84 / Anis 123 / Timéo 47 / Younick 74 // 30 / 58 / 73 / 101 / 115 / 119 / 130 / 134 //

1 Algèbre

1.1 Sous-espaces vectoriels & applications linéaires

1. RMS 2014 903a Centrale PSI

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $\dim(\operatorname{Ker} u) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u^2) \leqslant 2\dim(\operatorname{Ker} u)$. (On pourra utiliser l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im}(u)$.)

Solution. — Comme $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$, on a $\dim(\operatorname{Ker} u) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u^2)$. Montrons que $\dim(\operatorname{Ker} u^2) - \dim(\operatorname{Ker} u) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u)$.

Par théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker} u^2) - \dim(\operatorname{Ker} u) = \operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(u^2)$. L'endomorphisme $\tilde{u}$ indut par u sur $\operatorname{Im}(u)$ est bien défini car le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im}(u)$ est stable par u. Or $\operatorname{Ker} \tilde{u} = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} \tilde{u} = \operatorname{Im} u^2$, d'où par théorème du rang appliqué à $\tilde{u}$, $\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(u^2) = \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u)$. On a donc $\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(u^2) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u)$, et le résultat.

2. RMS 132 1126 CCINP PSI 2021

Soient E un espace vectoriel de dimension 4 et u un endomorphisme de E. Montrer que :

(a) si $\operatorname{rg}(u) = 2$ et $u^2 = 0$, alors $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)$ et il existe une base dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) si $\operatorname{rg}(u) = 3$ et $u^4 = 0$, alors $\operatorname{Ker}(u^2) = \operatorname{Im}(u^2)$ et il existe une base dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution. —

(a) De $u^2 = 0$, on déduit que $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$. Et ils ont la même dimension car $\dim \operatorname{Ker}(u) = 4 - 2$ d'après le thèorème du rang. Soit (e_1, e_2) une base de $\operatorname{Ker}(u)$. Comme $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)$, il existe $(e_3, e_4) \in E^2$ tel que $u(e_3) = e_1$ et $u(e_4) = e_2$. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre car

$$\begin{aligned} \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 = 0_E \quad &\Longrightarrow \quad \alpha_3 e_1 + \alpha_4 e_2 = 0_E \text{ en appliquant } u \\ &\Longrightarrow \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \text{ car } (e_1, e_2) \text{ est libre} \\ &\Longrightarrow \quad \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0_E \\ &\Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0. \end{aligned}$$

Cette famille libre est de cardinal 4, c'est donc une base. De plus, la matrice représentant u dans cette base est de la forme voulue.

(b) Montrons que $u^2 = 0$ est absurde : si $u^2 = 0$, alors $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$, d'où $3 = \operatorname{rg}(u) \leq \dim \operatorname{Ker}(u)$, ce qui est absurde car $\operatorname{rg}(u) + \dim \operatorname{Ker}(u) = \dim E = 4$ d'après le théorème du rang.

Montrons ensuite que $u^3 = 0$ est absurde : de $u^2 \neq 0$, on déduit qu'il existe un vecteur x tel que $u^2(x) \neq 0$. On vérifie que la famille $(u^2(x), u(x), x)$ est libre car $u^3 = 0$. Il suffit alors d'un vecteur y pour compléter la famille libre $(u^2(x), u(x))$ en une base $(y, u^2(x), u(x))$ de $\operatorname{Im}(u)$ car $3 = \operatorname{rg}(u)$. On vérifie que $(y, u^2(x), u(x), x)$ est alors une famille libre et donc une base de E car son cardinal est égal à la dimension de E. Et la matrice de u dans cette base est de la forme $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. De $3 = \operatorname{rg}(u)$, on déduit que $3 = \operatorname{rg}(N)$, d'où $a \neq 0$. Et, de $u^3 = 0$, on déduit que $N^3 = 0$, d'où $a^3 = 0$. C'est absurde.

Pour finir, de $u^3 \neq 0$, on déduit qu'il existe un vecteur x tel que $u^3(x) \neq 0$. On vérifie que la famille $(u^3(x), u^2(x), u(x), x)$ est libre car $u^4 = 0$. C'est donc une base de E car son cardinal est égal à la dimension de E. Dans cette base, la matrice M représentant u a la forme voulue : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $u^4 = 0$. D'où $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice représentant u^2. On en déduit que $\operatorname{Ker}(u^2) = \operatorname{Im}(u^2)$.

3. RMS 2012 275 X ESPCI PC, RMS 2013 305 X ESPCI PC, RMS 2013 869 Centrale PC

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$. Calculer la trace de Φ.

Solution. —

Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, soient $E_{i,j} = (\delta_{k,i}\delta_{j,\ell})_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n}$ les matrices élémentaires. On calcule le terme (i, j) de la matrice $\Phi(E_{i,j})$: il vaut $\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{i,k}\delta_{k,i}\delta_{j,\ell}b_{\ell,j} = a_{i,i}b_{j,j}$. Par suite

$$\operatorname{tr}\Phi = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} [\Phi(E_{i,j})]_{i,j} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,i}b_{j,j} = \left(\sum_{i=1}^n a_{i,i}\right)\left(\sum_{j=1}^n b_{j,j}\right) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B).$$

4. RMS 2007 768 Centrale PSI

Soient E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E = F \oplus G$ et on note p le projecteur sur F parallèlement à G et $q = \mathrm{id}_E - p$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que F est stable par f si et seulement si $q \circ f \circ p = 0$.

Solution. — On suppose que F est stable par f. Soit $x = y + z \in E$ avec $(y, z) \in F \times G$. Alors, par définition des projecteurs p et q :

$$(q \circ f \circ p)(x) = (q \circ f)(y) = q\Big(\underbrace{f(y)}_{\in F}\Big) = 0.$$

Réciproquement, on suppose que $q \circ f \circ p = 0$. Soit $y \in F$. Alors $y = p(y)$, donc $q(f(y)) = (q \circ f \circ p)(y) = 0$, ce qui montre que $f(y)$ est dans le noyau de q, à savoir F.

5. RMS 2016 969 CCP PC & RMS 2010 814 Centrale PSI

Soit $S\colon \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'application qui à f associe $S(f)\colon x \mapsto \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que, si $S(f) = 0$, alors f est périodique.

(b) L'application S est-elle injective ? surjective ?

(c) Soit $n \geq 2$. Montrer que S induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$, noté s.

(d) L'endomorphisme s est-il bijectif ? diagonalisable ?

Solution. —

(a) Comme f est continue, elle possède une primitive $F : x \mapsto \int_7^x f(t)\,dt$ et $S(f) : x \mapsto \frac{1}{2}F(x+1) - \frac{1}{2}F(x-1)$ est $\mathcal{C}^1$. De plus $S(f)'(x) = \frac{1}{2}F'(x+1) - \frac{1}{2}F'(x-1) = \frac{1}{2}[f(x+1) - f(x-1)]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $S(f) = 0$, alors la fonction $S(f)$ est constante, d'où sa dérivée est nulle, donc $f(x+1) = f(x-1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est 2−périodique.

(b) On cherche deux contre-exemples. La fonction S n'est pas injective car la fonction $t \mapsto \sin(\pi t)$ (continue et non nulle) appartient à son noyau et elle n'est pas surjective car $x \mapsto |x|$ est continue mais pas $\mathcal{C}^1$, donc elle n'appartient pas à l'image.

(c) La fonction S est linéaire et pour $f_k(x) = x^k$ on trouve :

$$S(f_k)(x) = \frac{1}{2(k+1)}\left[(x+1)^{k+1} - (x-1)^{k+1}\right] = \frac{1}{2(k+1)}\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}\left[1-(-1)^{k+1-i}\right]x^i = x^k + \cdots$$

On en déduit que $S(f_k)$ est un polynôme de degré $\leqslant k$. Par linéarité S induit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(d) Le calcul fait en (c) donne que, dans la base canonique $\mathcal{B} = (f_0, \cdots, f_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, la matrice de s est triangulaire supérieure avec une diagonale de 1. On voit que $\det s = 1$ et on en déduit que s est bijectif.

L'endomorphisme s n'est pas diagonalisable car (par l'absurde), n'ayant que la valeur propre 1, il serait alors égal à $\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$; or $s(X^2) = X^2 + \frac{1}{3} \neq X^2$.

Autre méthode : Comme s est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie, son injectivité donnera sa bijectivité. Or si $f \in \operatorname{Ker} s$, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) - f(x-1) = 0$ et le polynôme $P = f - f(0)$ admet une infinité de racines, les réels $2n$, $n \in \mathbb{N}$. Ce polynôme est donc nul, donc f est constant et $s(f) = 0$ donne alors $f = 0$.

6. RMS 2006 1043 CCP PSI

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g = E \iff \operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.

Solution. — On suppose que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g = E$. L'inclusion $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$ étant toujours vraie, il suffit de démontrer que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$. Soit $y \in \operatorname{Im} g$. Il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Par hypothèse, il existe $(x_1, x_2) \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$ tel que $x = x_1 + x_2$ et, comme $x_1 \in \operatorname{Im} f$, il existe $x_3 \in E$ tel que $x_1 = f(x_3)$. Alors $y = g(x) = g(f(x_3) + x_2) = g(f(x_3))$, puisque $x_2 \in \operatorname{Ker} g$), ce qui prouve que $y \in \operatorname{Im}(g \circ f)$.

Réciproquement, on suppose que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$. Soit $x \in E$. Alors $g(x) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$ par hypothèse, donc il existe $y \in E$ tel que $g(x) = g(f(y))$, ou encore $g(x - f(y)) = 0$. On vient de montrer que $z := x - f(y) \in \operatorname{Ker} g$, et l'égalité $x = f(y) + z$ prouve que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g = E$.

7. RMS 2014 639 Mines Ponts PSI

Soient E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f^2 = 0$ si, et seulement si, il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = f$ et $g \circ f = 0$.

Solution. — On remarque classiquement que $f^2 = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

- Dans le sens $\Longleftarrow$: $f^2 = f \circ (g \circ f) \circ g = 0$.
- Dans l'autre sens : soit G un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ et g la projection sur G parallèlement à $\operatorname{Ker} f$. Tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x_0 + x_1$, avec $(x_0, x_1) \in \operatorname{Ker} f \times G$. Alors $f(x) = f(x_0 + x_1) = f(x_1) = f(g(x))$ et comme $f(x) \in \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$, $g(f(x)) = 0_E$.

8. RMS 2016 324 X ESPCI PC

Mots-clés : caractérisation des matrices non inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det A = 0$ si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AB = BA = 0$.

Solution. — Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

- La condition est suffisante (en fait $AB = 0$ suffit). En effet s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AB = 0$, alors (en notant g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B) $\{0_{\mathbb{R}^n}\} \neq \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ donc $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$. Cela implique que f n'est pas bijective et que $\det A = \det f = 0$.
- Réciproquement, supposons que $\det A = 0$. Si $A = 0$ alors toute matrice non nulle B convient.

  Supposons maintenant que A est non nulle et non inversible. Les sous-espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont tous deux distincts de $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et de $\mathbb{R}^n$. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\operatorname{Im} f$, que l'on complète en une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Soit ensuite e_1' un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$. Un tel vecteur existe bien puisque $\operatorname{Ker} f \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Soit enfin g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini sur la base e par :

$$\begin{cases} (1) \quad \forall i \in \{1, \ldots, r\}, \quad g(e_i) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ (2) \quad \forall i \in \{r+1, \ldots, n\}, \quad g(e_i) = e_1' \end{cases}$$

  L'application g n'est pas nulle puisque $g(e_n) = e_1' \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, les formules (1) donnent $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ donc $g \circ f = 0$ et les formules (2) donnent $\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}(e_1') \subset \operatorname{Ker} f$ donc $f \circ g = 0$. Si on note B la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a donc :

$$B \neq 0 \quad \text{et} \quad BA = AB = 0.$$

9. RMS 2024 303 X MP MPI

Soient p un projecteur et u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $p \circ u + u \circ p = u$. Montrer que $\operatorname{tr}(u) = 0$.

Solution. — De la relation $p \circ u + u \circ p = u$, on déduit que $\operatorname{tr}(u) = 2\operatorname{tr}(u \circ p)$. En composant avec p, la relation donne : $u \circ p = p \circ u \circ p + u \circ p^2 = p \circ u \circ p + u \circ p$ car p est un projecteur. D'où $p \circ u \circ p = 0$ et, par suite, $0 = \operatorname{tr}(p \circ u \circ p) = \operatorname{tr}(u \circ p^2) = \operatorname{tr}(u \circ p)$. Donc $\operatorname{tr}(u) = 0$.

10. RMS 2024 930 Mines Ponts PSI

Soient un espace vectoriel E, un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et un sous-espace vectoriel F stable par u. On suppose que u est nilpotent et que $E = F + \mathrm{Im}(u)$. Montrer que $E = F$.

Solution. — Soit un vecteur $x_0 \in E$. De la relation $E = F + \mathrm{Im}(u)$, on tire l'existence de $(x_1, y_0) \in E \times F$ tel que $x_0 = u(x_1) + y_0$. De même, il existe $(x_2, y_1) \in E \times F$ tel que $x_1 = u(x_2) + y_1$ et, par récurrence : pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $(x_{p+1}, y_p) \in E \times F$ tel que $x_p = u(x_{p+1}) + y_p$. Toujours par récurrence, $x_0 = y_0 + u(y_1) + u^2(y_2) + \cdots + u^{p-1}(y_{p-1}) + u^p(x_p)$ pour tout p. En particulier, on peut choisir p tel que $u^p = 0$ car l'endomorphisme u est nilpotent. Alors $x_0 = y_0 + u(y_1) + u^2(y_2) + \cdots + u^{p-1}(y_{p-1})$ est une somme de vecteurs de F car les vecteurs y_k appartiennent à F par construction et le *sev* F est stable par u. D'où $E \subset F$, donc $E = F$.

11. UPS 20240331

Mots-clés : commutant d'une matrice

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n$ l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients complexes et $\mathcal{T}_n$ le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n$, on pose f_A l'endomorphisme défini sur $\mathcal{M}_n$ par $f_A(M) = AM - MA$.

(a) On suppose que $A \in \mathcal{T}_n$. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{T}_n$, la matrice $f_A(M)$ est triangulaire supérieure stricte. En déduire que $\dim(\mathcal{T}_n \cap \mathrm{Ker}\, f_A) \geq n$.

(b) Soit une matrice quelconque $A \in \mathcal{M}_n$. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}\, f_A) \geq n$.

Solution. —

(a) Soit M une matrice triangulaire supérieure : pour tout $j > i$, $m_{ij} = 0$ et $a_{ij} = 0$. Soit $N = f_A(M) = AM - MA$: on vérifie que $n_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} m_{kj} - m_{ik} a_{kj})$ est nul si $j > i$ ou $j = i$.

De ce que $f_A(M)$ est triangulaire, on tire que le *sev* $\mathcal{T}_n$ est stable par f_A. On peut donc poser g l'endomorphisme induit par f_A sur $\mathcal{T}_n$ et lui appliquer le théorème du rang : $\dim \mathrm{Im}\, g + \dim \mathrm{Ker}\, g = \dim \mathcal{T}_n$.

Or $\mathrm{Ker}\, g = \mathcal{T}_n \cap \mathrm{Ker}\, f_A$, $\dim \mathcal{T}_n = \frac{n^2+n}{2}$ et $\mathrm{Im}\, g$ est un sev de l'*ev* des matrices triangulaires strictes. Ce dernier ayant pour dimension $\frac{n^2-n}{2}$, $\dim \mathrm{Im}\, g \leq \frac{n^2-n}{2}$.

Finalement, $\dim(\mathcal{T}_n \cap \mathrm{Ker}\, f_A) = \dim \mathcal{T}_n - \dim \mathrm{Im}\, g \geq \frac{n^2+n}{2} - \frac{n^2-n}{2} \geq n$.

(b) On se ramène au cas d'une matrice triangulaire. La matrice A est trigonalisable car à coefficients complexes : il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = T$. Or $M \in \mathrm{Ker}\, f_A \iff P^{-1}MP \in \mathrm{Ker}\, f_T$. Ces deux noyaux ont donc même dimension car $M \mapsto P^{-1}MP$ est un isomorphisme.

Or, d'après la première question, $\dim(\mathcal{T}_n \cap \mathrm{Ker}\, f_T) \geq n$. Et, par inclusion, $\dim \mathrm{Ker}\, f_T \geq \dim(\mathcal{T}_n \cap \mathrm{Ker}\, f_T)$. Donc $\dim(\mathrm{Ker}\, f_A) = \dim(\mathrm{Ker}\, f_T) \geq n$.

1.2 Réduction

12. RMS 132 1003 Centrale PSI 2021

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que toute matrice non nulle de F soit inversible.

(a) Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que, si les matrices A et B sont inversibles, alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha A - B$ n'est pas inversible. Qu'en déduire sur la dimension de F ?

(b) Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Examiner le cas où n est impair. Donner un exemple où la dimension de F est 2. Montrer que, si n est pair, alors $\dim F \leq n$.

Solution. —

(a) La matrice $A^{-1}B$ possède au moins une valeur propre α car $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors la matrice $\alpha I_n - A^{-1}B$ n'est pas inversible et la matrice $\alpha A - B = A(\alpha I_n - A^{-1}B)$ ne l'est donc pas non plus. Donc $\dim F \leq 1$.

(b)
- Si n est impair, alors le polynôme caractéristique de $A^{-1}B$ est de degré impair et possède donc au moins une racine réelle α. On peut reconduire le raisonnement de la question précédente et conclure que $\dim F \leq 1$.
- Si $n = 2$, alors l'ensemble F des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $(a, b) = (0, 0)$, alors la matrice est nulle. Sinon, elle est inversible car son déterminant est $a^2 + b^2 \neq 0$.
- Si n est pair : soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si $(A_1, \cdots, A_p)$ est une famille libre de matrices de F, alors, pour tout $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \neq (0, \cdots, 0)$, la matrice $\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_p A_p$ n'est pas nulle. Elle est donc inversible par définition de F. Soit X un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Le vecteur $(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_p A_p)X$ n'est donc pas nul. Par suite, les p vecteurs $A_1 X, \cdots, A_p X$ sont linéairement indépendants. D'où $p \leq n$. Donc $\dim F \leq n$.

13. RMS 2012 1319 CCP PC

Mots-clés : polynômes annulateurs

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ f$ est un projecteur.

Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^3 = f$.

SOLUTION. — Comme $(f \circ f)^2 = f \circ f$, le polynôme $X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1)$ est annulateur de f, donc le spectre de f est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.
Si l'endomorphisme f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice A de f sur $\mathcal{B}$ soit

$$\mathrm{diag}(-1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1).$$

Comme $\lambda^3 = \lambda$ pour tout $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$, on en déduit que $A^3 = A$, donc que $f^3 = f$.
Réciproquement, si $f^3 = f$, le polynôme $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ est annulateur de f, et comme il est scindé à racines simples, f est diagonalisable.

14. RMS 2014 903b Centrale PSI

Mots-clés : polynômes annulateurs

Soit $M = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer le polynôme minimal de la matrice M.

(b) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ semblable à M.

SOLUTION. —

(a) Comme $(X-i)^2$ annule le premier bloc diagonal et $(X+i)$ annule le second, le polynôme $(X-i)^2(X+i)$ annule la matrice M, donc le polynôme minimal π_M divise $(X-i)^2(X+i)$. Or aucun des polynômes $X-i$, $X+i$, $(X-i)^2$ et $(X-i)(X+i) = X^2+1$ n'annule M, donc $\pi_M = (X-i)^2(X+i)$.

(b) Supposons $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ semblable à M. Alors B et M ont les mêmes polynômes annulateurs. En particulier, $\pi_M = (X-i)^2(X+i) = X^3 - iX^2 + X - i$ annule B, donc $B^3 - iB^2 + B - iI_4 = B(B^2+I_4) - i(B^2+I_4) = (0)$, et donc $B^2 + I_4 = (0)$, i.e. X^2+1 annule B. Or X^2+1 n'annule pas M, d'où une contradiction.

15. A1 CCP MP 2018

Mots-clés : polynômes annulateurs

Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T - I_n = 0$.

(a) Montrer que la matrice M est diagonalisable.

(b) Montrer que M est inversible si, et seulement si, 1 n'est pas une valeur propre de M.

SOLUTION. —

(a) De $M^2 + M^T - I_n = 0$, on déduit :
— en élevant $M^T = I_n - M^2$ au carré que $(M^T)^2 = I_n - 2M^2 + M^4$;
— en transposant que $(M^T)^2 = I_n - M$.
En comparant, il vient que $M^4 - 2M^2 + M = 0$. Le polynôme $P = X^4 - 2X^2 + X = X(X-1)(X^2+X-1) = X(X-1)(X - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})(X - \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$ est donc annulateur de la matrice M. Or ce polynôme P est scindé à racines simples, donc la matrice M est diagonalisable.

(b) Le spectre de M est inclus dans l'ensemble $\{0; 1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$ des racines du polynôme annulateur P. La trace de la matrice M nous renseigne aussi sur ses valeurs propres. De $M^2 + M^T - I_n = 0$, on déduit que $\mathrm{Tr}(M^2) + \mathrm{Tr}(M^T) - \mathrm{Tr}(I_n) = 0$ par linéarité de la trace. De plus, $\mathrm{Tr}(M^T) = \mathrm{Tr}(M)$, d'où $\mathrm{Tr}(M^2) + \mathrm{Tr}(M) - \mathrm{Tr}(I_n) = 0$, donc $\mathrm{Tr}(M^2 + M - I_n) = 0$.
Or la matrice M est diagonalisable et la trace est un invariant de similitude, d'où :

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^2 + \lambda_i - 1) = d_0 \times (0^2 + 0 - 1) + d_1 \times (1^2 + 1 - 1)$$

car $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ sont des racines de $\lambda^2 + \lambda - 1$. On en déduit que les dimensions d_0 de $SEP(0)$ et d_1 de $SEP(1)$ sont égales.
Enfin, une matrice est inversible *ssi* 0 n'appartient pas à son spectre. Donc M est inversible *ssi* $d_0 = 0$ *ssi* $d_1 = 0$.

16. RMS 2011 1128 CCP PC

Mots-clés : polynômes annulateurs

(a) On définit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = 2M + {}^{\mathrm{t}}M$. Déterminer un polynôme annulateur de φ. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

(b) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi_{a,b} : M \mapsto aM + b\,{}^{\mathrm{t}}M$. Montrer que $\varphi_{a,b}$ est inversible si, et seulement si, $a^2 \neq b^2$.

Solution. —

(a) Pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\varphi^2(M) = 2(2M + {}^{\mathrm{t}}M) + {}^{\mathrm{t}}(2M + {}^{\mathrm{t}}M) = 5M + 4\,{}^{\mathrm{t}}M = 4(2M + {}^{\mathrm{t}}M) - 3M = 4\varphi(M) - 3M$, donc $\varphi^2 = 4\varphi - 3\,\mathrm{id}$.

Le polynôme $X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples de φ, donc ce dernier est diagonalisable. Les valeurs propres de φ sont parmi les racines de tout polynôme annulateur : $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{1, 3\}$ (en fait, comme φ n'est manifestement ni l'identité, ni 3 fois l'identité, on est certain que $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1, 3\}$, ce que l'on vérifie ci-après). L'égalité $\varphi(M) = M$ est équivalente à $M + {}^{\mathrm{t}}M = 0$, et l'égalité $\varphi(M) = M$ est équivalente à $M = {}^{\mathrm{t}}M$, donc

$$E_1(\varphi) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$
$$E_3(\varphi) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

(b) Comme φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, son inversibilité équivaut à son injectivité. On examine donc le noyau de φ. Le système obtenu ci-dessous vient de la décomposition d'une matrice carrée A en somme d'une matrice symétrique $\frac{1}{2}(A + {}^{\mathrm{t}}A)$ et d'une matrice antisymétrique $\frac{1}{2}(A - {}^{\mathrm{t}}A)$, propriété qu'on applique à $\varphi(M)$:

$$\varphi(M) = 0 \iff aM + b\,{}^{\mathrm{t}}M = 0 \iff \begin{cases} (a+b)(M + {}^{\mathrm{t}}M) & = 0 \\ (a-b)(M - {}^{\mathrm{t}}M) & = 0. \end{cases}$$

La condition est nécessaire : on raisonne par contraposition. Si $a^2 = b^2$, on a, par exemple, $a = b$, et le système ci-dessus équivaut à $(a+b)(M + {}^{\mathrm{t}}M) = 0$, donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Ker}\varphi$, donc φ n'est pas injectif donc pas inversible (on raisonne de même si $a = -b$).

La condition est suffisante. Si $a^2 \neq b^2$, alors $a + b$ et $a - b$ sont non nuls, et, si $M \in \operatorname{Ker}\varphi$, alors $M = {}^{\mathrm{t}}M = -{}^{\mathrm{t}}M$, donc $M = 0$: le noyau de φ est réduit à $\{0\}$, donc φ est inversible.

17. RMS 2016 757 Centrale PSI

Mots-clés : symétries qui anticommutent

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

(a) Montrer que la dimension de E est paire.

(b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Solution. —

(a) L'endomorphisme f est une symétrie, d'où $E = E_1(f) \oplus E_{-1}(f)$ est la somme directe des deux sous-espaces vectoriels $E_1(f) = \operatorname{Ker}(1\,\mathrm{id}_E - f)$ et $E_{-1}(f) = \operatorname{Ker}(-1\,\mathrm{id}_E - f)$.

Pour tout $x \in E_1(f)$, on a $f(x) = 1x$ et, parce que f et g anticommutent, $0_E = f \circ g(x) + g \circ f(x) = f \circ g(x) + g(x)$, d'où $f(g(x)) = -g(x)$. D'où $g(x) \in E_{-1}(f)$, donc $g(E_1(f)) \subset E_{-1}(f)$ et, par suite, $\dim g(E_1(f)) \leq \dim E_{-1}(f)$. Or g est bijective (car $g^2 = \mathrm{id}_E$ parce que g est une symétrie), d'où $\dim g(E_1(f)) = \dim E_1(f)$. On en déduit que $\dim(E_{-1}(f)) \geqslant \dim(E_1(f))$.

De même pour $x \in E_{-1}(f)$ on a $f \circ g(x) - g(x) = 0$ donc $g(E_{-1}(f)) \subset E_1(f)$, et l'on conclut $\dim(E_{-1}(f)) \leqslant \dim(E_1(f))$. D'où l'égalité des dimensions des deux sous-espaces vectoriels $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$, et comme ces deux sous-espaces sont supplémentaires, il vient que $\dim(E) = \dim(E_{-1}(f)) + \dim(E_1(f))$ est paire.

De plus, g induit un isomorphisme de $E_1(f)$ sur $E_{-1}(f)$ (resp. de $E_{-1}(f)$ sur $E_1(f)$).

(b) Soit $n = \dim(E_1(f)) = \dim(E_{-1}(f))$. On fixe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E_1(f)$. Comme g induit un isomorphisme de $E_1(f)$ sur $E_{-1}(f)$, les vecteurs $e_{n+1} = g(e_1), \ldots, e_{2n} = g(e_n)$ forment une base de $E_{-1}(f)$.

Dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{2n})$, la matrice de f est alors par construction

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}.$$

Les égalités $e_{n+1} = g(e_1), \ldots, e_{2n} = g(e_n)$ donnent $g(e_{n+1}) = g^2(e_1) = e_1, \ldots, g(e_{2n}) = g^2(e_n) = e_n$ car $g^2 = \mathrm{id}_E$, donc la matrice de g dans $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

18. RMS 2016 472 Mines Ponts PSI

Mots-clés : racine carrée de la dérivation

On note E l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a) Soient E_1 le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions sinus et cosinus et $\phi_1\colon f \in E_1 \mapsto f' \in E_1$. Montrer qu'il existe un endomorphisme u de E_1 tel que $u \circ u = \phi_1$.

(b) Soit $\phi\colon f \in E \mapsto f' \in E$. Quel est le spectre de ϕ ? Existe-t-il un endomorphisme v de E tel que $v \circ v = \phi$?

Solution. —

(a) Le sous-espace E_1 est stable par ϕ et en notant $\mathcal{B} = (\sin, \cos)$, on a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui est le carré de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. L'endomorphisme u tel que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

convient.

(b) Tout $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de ϕ et le sous-espace propre associé est la droite D_λ dirigée par $e_\lambda\colon x \mapsto e^{\lambda x}$.
Supposons qu'un tel v existe. Alors $v \circ \phi = v \circ v^2 = v^2 \circ v = \phi \circ v$ donc D_λ est stable par v. Or D_λ est une droite, d'où e_λ est un vecteur propre de v, associé à une valeur propre μ réelle. On a alors $\phi(e_\lambda) = \mu^2 e_\lambda$ donc $\lambda = \mu^2$, ce qui est absurde si on prend $\lambda < 0$.

19. RMS 2013 585 Mines Ponts PSI, RMS 2013 332 X ESPCI PC, RMS 2016 905 TPE PSI

Mots-clés : valeur propre commune

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et χ_A, χ_B leurs polynômes caractéristiques respectifs.

(a) Montrer que : si A et B ont une valeur propre commune, alors il existe U et V non nuls dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $AU\,{}^{\mathrm{t}}V = U\,{}^{\mathrm{t}}V\,B$.

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que : si $AM = MB$, alors $\chi_B(A)M = 0$.

(c) À quelle condition, nécessaire et suffisante, les matrices A et B ont-elles une valeur propre commune ?

Solution. —

(a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B)$: $\exists U \neq 0,\ AU = \lambda U$. La matrice B et sa transposée ont le même spectre, d'où : $\exists V \neq 0,\ {}^{\mathrm{t}}B\,V = \lambda V$.

(b) Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, on montre que $A^k M = MB^k$, et, par linéarité, que $P(A)M = MP(B)$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$. Puis on choisit $P = \chi_B$ et on utilise que $P(B) = 0$ d'après le théorème de Cayley & Hamilton.

(c) Supposons que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$ et que $AM = MB$. On note $\chi_B(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{\alpha_p}$. Comme $\chi_B(A)M = 0$, on trouve $(A - \lambda_1 I_n)^{\alpha_1} \dots (A - \lambda_p I_n)^{\alpha_p} M = 0$. Or $A - \lambda_j I_n$ est inversible car $\det(A - \lambda_j I_n) = \chi_A(\lambda_j) \neq 0$ et donc $(A - \lambda_j I_n)^{\alpha_j}$ est inversible et $\chi_B(A)$ aussi. Ainsi $M = 0$.
Donc (d'après ce qui précède et la première question) A et B ont une valeur propre commune si, et seulement si, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$.

20. RMS 2014 1198 TPE PSI

(a) Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$ et $u\colon P \in \mathbb{C}_d[X] \mapsto (X-a)P' \in \mathbb{C}_d[X]$. Trouver les éléments propres de u.

(b) En déduire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur dérivée.

Solution. —

(a) Soit λ une valeur propre et P un vecteur propre associé. On note $n = \deg P$: $P = \alpha_n X^n + \dots$ avec $\alpha_n \neq 0$. D'où $(X-a)P' = \lambda P \iff n\alpha_n X^n + \dots = \lambda \alpha_n X^n + \dots$ ce qui implique que $\lambda = n$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(u) \subset [\![0, d]\!]$.
Réciproquement, soit $n \in [\![0, d]\!]$. On remarque que $u\big((X-a)^n\big) = n(X-a)^n$ donc $(X-a)^n$ est propre associé à la valeur propre n. Or on sait que $\big((X-a)^n\big)_{n \in [\![0,d]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}_d[X]$, on a donc une base constituée de vecteurs propres de u.
On en déduit que $\mathrm{Sp}(u) = [\![0, d]\!]$ et que $\mathrm{Ker}(u - n\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,\big((X-a)^n\big)$.

(b) Soit P divisible par P', $n = \deg P$. Le quotient s'écrit $Q = \frac{1}{n}(X-a)$. On utilise alors (a) avec une valuer de d supérieure à n : $u(P) = (X-a)P' = nQP' = nP$ donc $P \in \mathrm{Ker}(u - n\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,\big((X-a)^n\big)$.
Les polynômes divisibles par leur dérivée sont donc les $\lambda(X-a)^n$ où $\lambda \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$.

21. RMS 2007 934 CCP PC

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_n$ ne soit pas inversible.

(a) Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = iX$ et $X \neq 0$.

(b) Montrer qu'il existe U et V dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ libres tels que $AU = -V$ et $AV = U$.

Solution. —

(a) La matrice $A^2 + I_n$ se factorise dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sous la forme $(A - iI_n)(A + iI_n)$. Comme elle n'est pas inversible, c'est que $\det(A^2 + I_n) = \det(A - iI_n)\det(A + iI_n) = 0$. L'un des deux facteurs de ce produit est donc nul.
Si $\det(A - iI_n) = 0$, c'est que i est une valeur propre complexe de A, donc il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX = iX$.
Si $\det(A + iI_n) = 0$, alors il existe de même un vecteur $Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AY = -iY$. D'où $A\bar{Y} = i\bar{Y}$.

(b) On écrit le vecteur X de la question (a) sous la forme $U + iV$ avec U et V dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. La relation $AX = iX$ se traduit alors par $A(U + iV) = i(U + iV)$, c'est-à-dire par

$$\begin{aligned} AU &= -V \\ AV &= U. \end{aligned}$$

Il est impossible que U ou V soit nul, sinon U *et* V le seraient, donc X serait nul, ce qui n'est pas le cas. Par suite, si (U, V) est une famille liée, on peut supposer sans perte de généralité que $U = kV$ avec $k \in \mathbb{R}$. De la première équation ci-dessus, on tire $AV = -V/k$, et de la seconde, $AV = kV$, d'où l'on déduit $(1 + k^2)V = 0$, donc $V = 0$ (puisque k est réel), mais on vient de voir que cela est impossible.
La famille (U, V) est donc libre.

Un exercice en rapport : **RMS 2010 991 CCP PSI**

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$.

(a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(b) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution. —

(a) Le polynôme $X^3 + X = X(X + i)(X - i) \in \mathbb{C}[X]$ est scindé à racines simples et annulateur de A, qui est donc diagonalisable.

(b) On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A. La matrice A admet nécessairement une valeur propre réelle car sa taille est impaire, donc son polynôme caractéristique est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair. Cette valeur propre est parmi les racines de $X^3 + X$, polynôme annulateur de A. Par suite, zéro est valeur propre de A ; soit e_1 un vecteur propre associé. Il s'agit ensuite de montrer qu'il existe e_2 et e_3 tels que (e_1, e_2, e_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$ et tels que $u(e_2) = -e_3$ et $u(e_3) = e_2$.
Analyse. Si ces vecteurs existent, alors $e_3 = -u(e_2)$, et $u^2(e_2) = -e_2$, donc $e_2 \in \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$.
Synthèse. On commence par montrer que $\operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$ n'est pas réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire que $u^2 + \mathrm{id}$ n'est pas un isomorphisme. Si c'était le cas, comme $A^3 + A = 0$ donc $u \circ (u^2 + \mathrm{id}) = 0$, on en déduirait que $u = 0$, ce que l'énoncé exclut. On choisit ensuite un vecteur non nul $e_2 \in \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$ et on pose $e_3 = -u(e_2)$. On montre enfin que (e_1, e_2, e_3) est une base. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i e_i = 0$. En appliquant u, puis u^2, et en utilisant la relation $u^2(e_2) = -u(e_3) = -e_2$, on obtient

$$\begin{aligned} (L_1) \qquad & -\lambda_2 e_3 - \lambda_3 e_2 = 0 \\ (L_2) \qquad & -\lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0. \end{aligned}$$

La combinaison $\lambda_3(L_1) + \lambda_2(L_2)$ conduit à $-(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)e_2 = 0$, donc à $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ puisque $e_2 \neq 0$. Il reste $\lambda_1 e_1 = 0$, d'où $\lambda_1 = 0$, puisque e_1 est un vecteur propre.

22. RMS 2016 885 ENSAM PSI

Mots-clés : matrice circulante

Soient

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Quel est son spectre ?

(b) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Quel est son spectre ?

SOLUTION. —

(a) (Si on remarque que $J^n = I_n$, alors on peut d'emblée affirmer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car le polynôme $X^n - 1$ est annulateur, scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$.) Sinon, on peut reconnaître une matrice compagnon et on effectue $L_1 \leftarrow L_1 + zL_2 + \cdots + z^{n-1}L_n$ pour calculer

$$\chi_J(z) = \begin{vmatrix} z & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & z & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & z^n - 1 \\ -1 & z & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & z \end{vmatrix} = z^n - 1$$

en développant selon L_1.

La matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car χ_J possède n racines distinctes deux à deux, à savoir les racines $n-$ièmes de l'unité : $\mathrm{e}^{ik2\pi/n}$, avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

(b) La matrice J^k est obtenue à partir de J en décalant les deux rangées de 1 de $k-1$ crans vers le bas.

Donc $P(J) = A$ si $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$.

Les valeurs propres de A sont les $P(\omega)$ où $\omega \in \mathbb{U}_n$ et la matrice A est diagonalisable car les vecteurs propres de J sont aussi des vecteurs propres de A, or les vecteurs propres de J forment une base.

23. RMS 2010 1043 Petites Mines PC

Soient un entier $n \geq 2$, un réel m et la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = 1$ si $(i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n-1\}$ et $a_{i,n} = m$ si $1 \leqslant i \leqslant n$.

(a) On suppose que $m \neq 1 - n$. Montrer que A est diagonalisable.

(b) On suppose que $m = 1 - n$. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dont tous les coefficients sont nuls excepté $b_{1,2} = 1$.

SOLUTION. —

(a) Les colonnes de A étant proportionnelles à la première et non toutes nulles, A est de rang 1, donc zéro est valeur propre et $\dim SEP(0) = n - 1$. De plus $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (n - 1 + m) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, or $n - 1 + m \neq 0$, d'où $\lambda = n - 1 + m$ est une valeur propre non nulle. D'où $\dim SEP(0) + \dim SEP(\lambda) = n$, donc A est diagonalisable.

AUTRE MÉTHODE — On calcule $A^2 = [(n-1) + m]\,A$, ce qui révèle que $P(X) = X \cdot (X - [(n-1) + m])$ est un polynôme annulateur de A, scindé à racines simples car $(n-1) + m \neq 0$ par hypothèse. Donc la matrice A est diagonalisable car une matrice est diagonalisable *ssi* elle possède un polynôme annulateur à racines simples.

(b) On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On remarque que $\operatorname{Im} u$ est la droite engendrée par $e'_1 = e_1 + \cdots + e_n$, et que $u(e'_1) = 0$ car $n - 1 + m = 0$, donc que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, qui est de dimension $n - 1$ d'après la question (a).

On pose alors $e'_2 = e_2$, de sorte que $u(e'_2) = e'_1 \neq 0$, et le théorème de la base incomplète assure que l'on peut trouver des vecteurs $e'_3, \ldots, e'_n$ pour compléter e'_1 et former une base $(e'_1, e'_3, \ldots, e'_n)$ de $\operatorname{Ker} u$. Comme $e'_2 \notin \operatorname{Ker} u$, la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, et la matrice de u sur $\mathcal{B}'$ est B, donc A est bien semblable à B.

24. RMS 2016 904 CCEM PSI

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit M une matrice carrée dont la première ligne est $(a, 0, \ldots, 0)$ la deuxième $(1, \ldots, 1)$, et toutes les autres $(1, 0, \ldots, 0)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que M soit diagonalisable.

SOLUTION. — On a (le déterminant étant triangulaire par blocs)

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \chi_M = \begin{vmatrix} X - a & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & X - 1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & 0 & X & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & X \end{vmatrix} = (X - a)(X - 1)X^{n-2}.$$

La matrice M est de rang 2 donc $\dim E_0(M) = n - 2$.

— Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$: les valeurs propres a et 1 sont simples donc la dimension des espaces propres est 1 et $\dim E_0(M) = n-2$, chaque espace propre a pour dimension la multiplicité de la valeur propre donc M est diagonalisable.

— Si $a = 0$: la valeur propre 0 est d'ordre $n-1$ et $\dim E_0(M) = n-2$, l'espace propre n'a pas pour dimension la multiplicité de la valeur propre donc M n'est pas diagonalisable.

— Si $a = 1$: la valeur propre 1 est d'ordre 2, mais

$$I - M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang $n-1$ donc $\dim E_1(M) = 1$; l'espace propre n'a pas pour dimension la multiplicité de la valeur propre donc M n'est pas diagonalisable.

25. RMS 2014 1331 TPE PC

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi_A \colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $\Phi_A = 0$.

(b) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, comparer $\Phi_{P(A)}$ et $P(\Phi_A)$.

(c) Montrer que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Solution. —

(a) L'application Φ_A va de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même, et sa linéarité résulte de la bilinéarité du produit matriciel, c'est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Si $\Phi_A = 0$, alors $\Phi_A(I_n) = AI_n = A = 0$. Réciproquement, il est clair que $A = 0 \implies \Phi_A = 0$.

(b) Une récurrence donne $(\Phi_A)^k = \Phi_{A^k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, et on constate que $\Phi_{\lambda A + \mu B} = \lambda \Phi_A + \mu \Phi_B$ pour tous $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
En combinant les deux résultats, on obtient

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \Phi_{P(A)} = P(\Phi_A).$$

(c) Si A est diagonalisable, alors il existe un polynôme scindé à racines simples $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = 0$. On déduit de la question précédente que $P(\Phi_A) = \Phi_{P(A)} = \Phi_0 = 0$, donc que Φ_A est diagonalisable.
Réciproquement, si Φ_A est diagonalisable, alors il existe un polynôme scindé à racines simples $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\Phi_A) = 0$. On en déduit que $\Phi_{P(A)} = 0$, donc que $P(A) = 0$ en vertu de la question (a), donc que A est diagonalisable.

26. RMS 2014 1183 CCP PSI, RMS 2016 903 CCP PSI

L'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui envoie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$ est-il diagonalisable ?

Solution. — *Première méthode*. On remarque que $\phi^4 = \mathrm{id}$. Le polynôme $X^4 - 1$ est annulateur et ses racines réelles sont -1 et $+1$. Comme $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\phi) \subset \{-1; +1\}$, si ϕ était diagonalisable sur $\mathbb{R}$, on aurait $\phi^2 = \mathrm{id}$, ce qui n'est pas le cas.
Deuxième méthode. La matrice de φ dans la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est $\chi_\varphi = X^4 - 1$ qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc φ n'est pas diagonalisable.

27. RMS 2013 970 TPE EIVP PSI

Discuter, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la diagonalisabilité et la trigonalisabilité en fonction du paramètre réel a de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix}$.

Solution. — Le polynôme caractéristique de A vaut

$$\chi_A(x) = (x-1)(x^2 - (a-1)x + 1),$$

et le discriminant de $x^2 - (a-1)x + 1$ vaut $\Delta = a^2 - 2a - 3 = (a+1)(a-3)$. On en déduit que

— Si $-1 < a < 3$, χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc A n'est ni trigonalisable ni diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

— Sinon, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, ses valeurs propres sont 1 et λ_2, λ_3 et A est au moins trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
- si $a = -1$, alors $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ et $A + I_3$ est de rang 2 donc $\dim \operatorname{Ker}(A + I_3) = 1 < 2$ et A est seulement trigonalisable.
- si $a = 3$, alors $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, d'où A n'ayant qu'une valeur propre et n'étant pas l'identité, est seulement trigonalisable.
- si $a \neq -1$ et $a \neq 3$, alors $\lambda_2 \neq \lambda_3$. Comme $\lambda_2\lambda_3 = 1$, elles sont nécessairement distinctes de 1. A admet donc 3 valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

Conclusion : si $a \in]-1, 3[$, A n'est pas trigonalisable, si $a = -1$ ou 3, A est trigonalisable mais pas diagonalisable et si $a < -1$ ou $a > 3$, A est diagonalisable.

28. RMS 2011 1079 CCP PSI, RMS 2013 648 Mines Ponts PC, RMS 2014 1225 CCP PSI, RMS 2016 919 ENSEA PSI

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M\,{}^{\mathrm{t}}M\,M = I_n$. Montrer que M est symétrique. Déterminer M.

Solution. — La relation $M\,{}^{\mathrm{t}}M\,M = I_n$ entraîne (en transposant) que ${}^{\mathrm{t}}M\,M\,{}^{\mathrm{t}}M = I_n$. Or, en multipliant l'hypothèse de départ par ${}^{\mathrm{t}}M$ à gauche, on obtient ${}^{\mathrm{t}}M\,M\,{}^{\mathrm{t}}M\,M = {}^{\mathrm{t}}M$, donc $I_n M = M = {}^{\mathrm{t}}M$, c'est-à-dire que M est symétrique réelle, donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème spectral.

Comme $M\,{}^{\mathrm{t}}M\,M = M^3 = I_n$, le polynôme $X^3 - 1$ est annulateur de M, donc sa seule valeur propre réelle vaut 1. La matrice M est donc semblable à I_n, donc égale à I_n :

$$M = I_n.$$

29. RMS 2016 898 CCP PSI

Mots-clés : hyperplan stable

(a) Soient H un hyperplan d'un $\mathbb{C}$–espace vectoriel E de dimension finie, et u un endomorphisme de E.
Montrer que $u(H) \subset H \iff \exists \lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id}) \subset H$.

(b) Trouver tous les sous-espaces stables par l'endomorphisme u représenté dans une base B par

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution. — (Réviser l'exercice 17 du TD 4 et voir aussi l'exercice 30.)

(a) $\boxed{\Rightarrow}$ Soit D une droite telle que $E = H \oplus D$ et a un vecteur directeur de D. Il existe alors $(a_H, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $u(a) = a_H + \lambda a$. Et, pour tout y de E, $y = y_H + \alpha a$ donc

$$(u - \lambda\,\mathrm{id})(y) = u(y_H + \alpha a) - \lambda(y_H + \alpha a) = u(y_H) - \lambda y_H + \alpha(u(a) - \lambda a) = u(y_H) - \lambda y_H + \alpha a_H \in H$$

par somme de trois éléments de H, H étant stable par u.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall x \in H, u(x) - \lambda x \in H$ donc $u(x) = \lambda x + x_H$ où $x_H \in H$ donc $u(x) \in H$.

(b)
- Les sous-espaces vectoriels $\{0\}$ et $\mathbb{R}^3$ sont stables par u (dimension 0 et 3).
- Les espaces de dimension 1 stables par u sont les droites engendrées par des vecteurs propres ; on trouve $\chi_u = (X-2)^3$; l'espace propre associé à la seule valeur propre 2 est de dimension 1 : c'est

$$D = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right),$$

qui est le seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 stable par u.
- Utilisons (a) : On suppose que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2, stable par u. On cherche à obtenir

$$\operatorname{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id}) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3-\lambda \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2-\lambda \end{pmatrix}\right) \subset H,$$

donc la famille des trois vecteurs est liée donc le déterminant de cette famille vaut 0, donc $\chi(\lambda) = 0$ donc λ est valeur propre de A donc $\lambda = 2$. Alors

$$\operatorname{Im}(u - 2\,\mathrm{id}) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = H,$$

par inclusion et égalité des dimensions). Par suite, H est le seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 stable par u.

30. RMS 2015 686 Mines Ponts PC

Mots-clés : hyperplan stable

Soient $n \geqslant 2$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ non nulle et $H = \operatorname{Ker} \Phi$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que f stabilise H si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi \circ f = \lambda \Phi$.

Solution. — (voir l'exercice 29.) S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi \circ f = \lambda \Phi$, considérons $x \in H$. Alors $\Phi(f(x)) = \lambda \Phi(x) = 0$, donc $f(x) \in \operatorname{Ker} \Phi = H$, donc H est stable par f.

Réciproque. D'après le théorème du rang on a : $\dim(H) = n-1$. Puisque Φ est non nulle, il existe $a \in \mathbb{R}^n \setminus H$ tel que $\Phi(a) = 1$. Tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ s'écrit alors de façon unique sous la forme $x = \alpha a + h$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $h \in H$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Si f stabilise H alors deux cas se présentent.

- 1er cas : $f(a) \in H$.
  Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Posons $x = \alpha a + h$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $h \in H$. On a alors $(\Phi \circ f)(x) = \Phi(\alpha f(a) + f(h))$. Or $\alpha f(a) + f(h) \in H$, donc $(\Phi \circ f)(x) = 0$.
  On a alors $\Phi \circ f = 0.\Phi = 0$ donc, dans ce cas, on a bien $\Phi \circ f = \lambda \Phi$ pour $\lambda = 0$.
- 2ème cas : $f(a) \notin H$.
  Posons $\lambda = \Phi(f(a)) \neq 0$. Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Posons $x = \alpha a + h$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $h \in H$. On a alors $(\Phi \circ f)(x) = \Phi(\alpha f(a) + f(h)) = \lambda \alpha = \lambda \Phi(x)$.
  Par conséquent, dans ce cas, on a aussi $\Phi \circ f = \lambda \Phi$.

31. RMS 2024 65 ENS MP MPI

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M = (m_{ij}) \in \mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice d'une réflexion et $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Montrer que $\chi_B(1) = \chi_A(0) \cdot \chi_A(1) \cdot (1 - m_{11})$.

Solution. — $\chi_B(1) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^T \end{pmatrix} - M\right) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ car $A^T A = I_n$ par hypothèse. Le second facteur est $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det A = (-1)^n \chi_A(0)$. Pour étudier le premier facteur, remarquons que la matrice $I_{n+1} - M$ est de rang 1 car $\operatorname{Ker}(I_{n+1} - M)$ est l'ensemble des vecteurs invariants par M et est donc un hyperplan car M est la matrice d'une réflexion. Toutes les colonnes de la matrice $I_{n+1} - M$ sont donc colinéaires.

Ou bien la première colonne C_1 de $I_{n+1} - M$ est nulle et alors celle de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^T \end{pmatrix} - M$ l'est aussi donc le déterminant de cette matrice est nul. Par ailleurs, $1 - m_{11} = 0$, ce qui rend vraie l'égalité à prouver.

Ou bien cette première colonne n'est pas nulle et alors chaque autre colonne C_j lui est colinéaire : $\exists \lambda_j \in \mathbb{R},\ C_j = \lambda_j C_1$. Et, en retranchant $\lambda_j C_1$ à C_j, on ne change pas la valeur du déterminant :

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^T \end{pmatrix} - M\right) = \begin{vmatrix} 1 - m_{11} & 0 \\ * & A^T - I_n \end{vmatrix} = (1 - m_{11}) \cdot (-1)^n \det(I_n - A) = (1 - m_{11}) \cdot (-1)^n \chi_A(1).$$

1.3 Algèbre bilinéaire

32. RMS 2014 659 Mines Ponts PSI

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ (\operatorname{tr} A)^2 \leqslant \lambda \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}A\, A)\}$.

(b) Trouver $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+,\ \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \det A \leqslant \lambda \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}A\, A)\}$.

Solution. —

(a) Comme $\operatorname{tr} A = \langle I_n, A \rangle$ (produit scalaire canonique), par Cauchy-Schwarz, $(\operatorname{tr} A)^2 \leqslant \|I_n\|^2 \|A\|^2 = n \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}A\, A)$ avec égalité si (A, I_n) est liée. On en déduit que la borne inférieure cherchée vaut n.

(b) Pour $n = 2$, $\det A \leqslant |ad| + |bc| \leqslant \frac{1}{2}((a^2 + d^2) + (b^2 + c^2)) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}A\, A)$ avec égalité pour $A = I_n$ (entre autres). On en déduit que la borne inférieure cherchée est $\frac{1}{2}$.

Un exercice en rapport : **RMS 2013 652 Mines Ponts PC**

Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $2 \operatorname{tr}(AB) \leqslant \operatorname{tr}(A^2) + \operatorname{tr}(B^2)$.

Solution. — On sait que le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a pour expression $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}A\, B)$. Si A et B appartiennent à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, leur produit scalaire et leur norme sont donnés par $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB)$ et $\|A\|^2 = \operatorname{tr}(A^2)$, $\|B\|^2 = \operatorname{tr}(B^2)$. L'inégalité de Cauchy et Schwarz, puis l'inégalité arithmético-géométrique entraînent que

$$\operatorname{tr}(AB) \leqslant |\operatorname{tr}(AB)| = |\langle A, B \rangle| \leqslant \|A\| \|B\| \leqslant \frac{1}{2}\left(\|A\|^2 + \|B\|^2\right) = \frac{\operatorname{tr}(A^2) + \operatorname{tr}(B^2)}{2}.$$

33. RMS 2014 913 Centrale PSI

(a) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 P(t)\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t)\ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi P(t)Q(t)\sin t\,\mathrm{d}t$.

SOLUTION. —

(a) $\int_0^1 \ln t\,dt$ converge et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 t^k \ln t\,dt$ converge aussi car $t^k \ln t = o(\ln t)$ $(t \to 0^+)$. Par linéarité, l'intégrale $\int_0^1 P(t)\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

(b) On vérifie que l'application $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définie par $\langle P|Q\rangle = \int_0^\pi P(t)Q(t)\sin t\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$: elle est bien symétrique et bilinéaire. Elle est aussi positive car $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^\pi P^2(t)\sin(t)\,dt \geq 0$ car $\forall t \in [0,\pi],\ P^2(t)\sin(t) \geq 0$. Enfin elle est définie car

$$\begin{aligned}\int_0^\pi P^2(t)\sin(t)\,dt = 0 &\implies \forall t \in [0,\pi],\ P^2(t)\sin(t) = 0 \text{ car la fonction } t \mapsto P^2(t)\sin(t) \text{ est continue et positive}\\ &\implies \forall t \in]0,\pi[,\ P(t) = 0 \text{ car } \forall t \in]0,\pi[,\ \sin(t) \neq 0\\ &\implies P = 0 \text{ car le polynôme } P \text{ a une infinité de racines.}\end{aligned}$$

L'application $P \mapsto \int_0^1 P(t)\ln(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie d'après (a) et est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, qui est un espace vectoriel de dimension finie. Or toute forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ est, d'après le théorème de représentation de Riesz, de la forme $P \mapsto \langle P|Q\rangle$, pour un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, d'où le résultat.

34. RMS 2006
CCP PC, RMS 2010 1055 Télécom Sud Paris PC

Soient $(E, \langle,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, p un projecteur orthogonal de rang r et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = r$.

SOLUTION. —

On note $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de p sur la base e : $\|p(e_i)\|^2 = \langle p(e_i), e_i\rangle = \langle \sum_{j=1}^n a_{i,j}e_j, e_i\rangle = a_{i,i}$ car la base e est orthonormale, donc

$$\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \mathrm{tr}(A) = r,$$

car on sait que le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

35. RMS 2011 1126 CCP PC

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, H_1 et H_2 deux hyperplans distincts, e_1 et e_2 deux vecteurs unitaires respectivement orthogonaux à H_1 et H_2. On pose

$$s_1\colon x \mapsto x - 2\langle x, e_1\rangle e_1 \quad \text{et} \quad s_2\colon x \mapsto x - 2\langle x, e_2\rangle e_2.$$

(a) Vérifier que le plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est stable par $s_2 \circ s_1$.

(b) Montrer que $x \in E$ est fixe par $s_2 \circ s_1$ si et seulement si $x \in H_1 \cap H_2$.

SOLUTION. — On reconnaît en s_k la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan H_k.

(a)

$$\begin{aligned}(s_2 \circ s_1)(e_1) &= s_2(-e_1) = -e_1 + 2\langle e_1, e_2\rangle e_2\\ (s_2 \circ s_1)(e_2) &= s_2(e_2 - 2\langle e_1, e_2\rangle e_1) = -e_2 - 2\langle e_1, e_2\rangle(e_1 - 2\langle e_1, e_2\rangle e_2).\end{aligned}$$

On lit ci-dessus que les images par $s_2 \circ s_1$ de e_1 et e_2 appartiennent à $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ qui est donc stable par $s_2 \circ s_1$.

(b) Sens direct. Si x est fixe par $s_2 \circ s_1$, alors $s_2(s_1(x)) = x$, donc $s_1(x) = s_2(x)$, en composant à gauche par s_2 et en utilisant l'égalité $s_2^2 = \mathrm{id}_E$. D'où $x - 2\langle x, e_1\rangle e_1 = x - 2\langle x, e_2\rangle e_2$, donc

$$\langle x, e_1\rangle e_1 = \langle x, e_2\rangle e_2.$$

Comme H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts, e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, et on en déduit que $\langle x, e_1\rangle = \langle x, e_2\rangle = 0$, donc que $x \in H_1 \cap H_2$.

Sens réciproque. Si $x \in H_1 \cap H_2$, alors $s_1(x) = x$ car $x \in H_1$, puis $s_2(s_1(x)) = s_2(x) = x$, car $x \in H_2$. Finalement, x est fixe par $s_2 \circ s_1$.

36. RMS 2016 761 Centrale PSI

Soient p et q deux projections orthogonales définies sur un espace euclidien E. Soit $u = p + q$.

(a) Soit x un vecteur de norme 1. Encadrer $\langle x \mid p(x)\rangle$ et $\langle x \mid q(x)\rangle$. En déduire que $\mathrm{Sp}(u) \subset [0, 2]$.

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

(c) Déterminer $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$.

Solution. —

(a) (Faire un dessin.) Pour tout $x \in E$ unitaire, $\langle x \mid p(x)\rangle = \|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$, d'où $\langle x \mid p(x)\rangle \in [\,0\,;1\,]$ et, de même, $\langle x|q(x)\rangle \in [\,0\,;1\,]$

En particulier si λ est valeur propre de u et si x est un vecteur propre unitaire associé :

$$\lambda = \langle x \mid u(x)\rangle = \langle x \mid p(x)\rangle + \langle x \mid q(x)\rangle \in [\,0\,;2\,].$$

(b) Si $x \in E_0(u)$, on a $0 = \langle x \mid u(x)\rangle = \langle x \mid p(x)\rangle + \langle x \mid q(x)\rangle$ avec $\langle x \mid p(x)\rangle \geqslant 0$ et $\langle x \mid q(x)\rangle \geqslant 0$, donc nécessairement $\langle x \mid p(x)\rangle = \langle x \mid q(x)\rangle = 0$, ce qui prouve $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. Réciproquement $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(u)$, d'où l'égalité.

(c) On remplace p et q par $\mathrm{id} - p$ et $\mathrm{id} - q$, qui sont aussi des projections orthogonales. Donc $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.

37. RMS 2008 975 CCP PSI, RMS 2015 715 Mines Ponts PC, RMS 2015 1033, TPE PC, RMS 2016 558 Mines Ponts PC

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n^{3/2}.$$

Solution. — La norme euclidienne canonique de chaque colonne de A vaut 1. En sommant sur les n colonnes de A, on obtient

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = n$$

Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont toutes les composantes valent 1. Si $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on constate que ${}^{\mathrm{t}}U\,AU = \langle U, AU\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$. Comme A est orthogonale, elle conserve la norme donc $\|AU\| = \|U\| = \sqrt{n}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors :

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| = |\langle U, AU\rangle| \leqslant \|U\|\|AU\| = \|U\|^2 = n.$$

Comme $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, tous ses éléments appartiennent à $[-1,1]$. Par suite, $a_{i,j}^2 \leqslant |a_{i,j}|$ pour tout (i,j). Alors

$$n = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2\right) \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|.$$

Enfin, on note $S = (s_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de signes définie par $s_{i,j} = \mathrm{signe}(a_{i,j}) \in \{-1,1\}$, avec un choix arbitraire si $a_{i,j} = 0$. Alors $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}A\,S)$. Comme on sait que $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \mapsto \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}A\,B)$ est un produit scalaire, l'inégalité de Cauchy et Schwarz donne

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}A\,S) \leqslant \sqrt{\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}A\,A)}\sqrt{\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}S\,S)} = \sqrt{\mathrm{tr}(I_n)}\sqrt{\mathrm{tr}(nJ)} = \sqrt{n}\sqrt{n^2} = n^{3/2}.$$

38. RMS 2009 1027 Centrale PC

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien.

(a) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint tel que $\langle g(z), z\rangle = 0$ pour tout $z \in E$. Montrer que $g = 0$.

(b) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint tel que $\langle g(z), z\rangle = \|g(z)\|^2$ pour tout $z \in E$. Montrer que g est un projecteur.

Solution. —

(a) Étant autoadjoint, g est diagonalisable : soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base propre de g associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors $\langle g(e_i), e_i\rangle = 0 = \lambda_i\|e_i\|^2$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, donc toutes les valeurs propres de g sont nulles, donc g est l'endomorphisme nul (car g est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont nulles).

(b) Soit $z \in E$. Alors $\langle (g\circ g)(z), z\rangle = \langle g(z), g(z)\rangle = \|g(z)\|^2$ car g est autoadjoint. Mais on a aussi $\langle g(z), z\rangle = \|g(z)\|^2$ par hypothèse. On en déduit que $\langle f(z), z\rangle = 0$ pour tout $z \in E$, où l'on a posé $f = g\circ g - g$. Comme g est autoadjoint, f aussi, et la question (a) affirme alors que f est nul, donc que $g \circ g = g$, c'est-à-dire que g est un projecteur.

39. RMS 2013 987 CCP PSI

Mots-clés : valeurs propres de la partie symétrique d'une matrice

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = \frac{1}{2}(A + {}^{\mathrm{t}}A)$. On note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ le spectre ordonné par ordre croissant de S. Si μ est une valeur propre réelle de A, montrer que $\lambda_1 \leqslant \mu \leqslant \lambda_n$.

Solution. — La matrice S est clairement symétrique réelle donc est orthogonalement diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont réelles ce qui justifie de les classer ainsi. De plus, en décomposant X dans une base orthonormée de vecteurs propres de S, on prouve que

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_1 \|X\|^2 \leqslant \langle SX|X\rangle \leqslant \lambda_n \|X\|^2.$$

Soit μ une valeur propre de A et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors $\langle AX|X\rangle = \mu\|X\|^2$. Par ailleurs,

$$\langle SX|X\rangle = \frac{1}{2}\Big(\langle X|AX\rangle + \langle {}^{\mathrm{t}}A\,X|X\rangle\Big) = \frac{1}{2}\Big({}^{\mathrm{t}}X\,AX + {}^{\mathrm{t}}X\,AX\Big) = {}^{\mathrm{t}}X\,AX = \mu\|X\|^2.$$

On en déduit que $\lambda_1\|X\|^2 \leqslant \mu\|X\|^2 \leqslant \lambda_n\|X\|^2$ et, comme $\|X\| \neq 0$, que $\lambda_1 \leqslant \mu \leqslant \lambda_n$.

40. OdT 2013 19 149 TPE PSI

Mots-clés : matrice symétrique semblable à sa diagonale

Soit S symétrique réelle et D diagonale dont les coefficients sont ceux de la diagonale de S. On suppose S et D semblables. Calculer $\mathrm{tr}(S^2)$ de deux manières et en déduire que $S = D$.

Solution. — On note $S = (s_{i,j})$. Comme S et D sont semblables, S^2 et D^2 sont semblables et donc $\mathrm{tr}(S^2) = \mathrm{tr}(D^2) = \sum_{k=1}^n s_{k,k}^2$ car D et S ont les mêmes éléments diagonaux. Par ailleurs, S étant symétrique, $\mathrm{tr}(S^2) = \mathrm{tr}(S^T S) = \sum_{j,k} s_{j,k}^2$ (c'est la formule du produit scalaire canonique qui nous le dit). Par identification, on obtient $\sum_j \sum_{k\neq j} s_{j,k}^2 = 0$. Or $s_{j,k}^2 \geqslant 0$, donc pour tout $k \neq j$, $s_{j,k} = 0$, i.e. $S = D$.

41. RMS 2010 1028 TPE PSI

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Écrire la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle π et d'axe dirigé par le vecteur (a,b,c).

Solution. — On note u le vecteur (a,b,c), puis D la droite engendrée par u, et P le plan orthogonal à D, et enfin r la rotation étudiée. Cette dernière est aussi appelée le demi-tour d'axe D, et c'est aussi la symétrie orthogonale par rapport à D.

Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Comme u est unitaire, on sait que le projeté orthogonal de x sur D vaut $(u \mid x)u$ et la décomposition unique de x sur la somme directe $D \oplus P = \mathbb{R}^3$ est $x = (u \mid x)u + [x - (u \mid x)u]$. On en déduit que

$$r(x) = (u \mid x)u - [x - (u \mid x)u] = 2(u \mid x)u - x.$$

On applique cela à x valant successivement les trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ce qui donne la matrice cherchée :

$$\begin{pmatrix} 2a^2-1 & 2ba & 2ca \\ 2ab & 2b^2-1 & 2cb \\ 2ac & 2bc & 2c^2-1 \end{pmatrix}.$$

42. RMS 2014 180 ENS PC

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note $\mathcal{S}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $\Phi\colon (t, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S} \mapsto e^{tA}X_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est bijective.

Solution. — L'application Φ est bijective *ssi* $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \exists! t \in \mathbb{R},\ \|e^{-tA}X\|_2 = 1$.

D'après le théorème spectral, la matrice A est orthodiagonalisable car symétrique : il existe donc $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$ est diagonale.

Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $e^{-tA}X = Pe^{-tD}P^{-1}X = Pe^{-tD}Y$, en notant $Y = P^{-1}X$. De plus $\|Pe^{-tD}Y\|_2 = \|e^{-tD}Y\|_2$ car la matrice P est orthogonale. Il suffit donc de montrer que : $\exists! t \in \mathbb{R},\ \|e^{-tD}Y\|_2 = 1$.

$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, avec $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_k > 0$ car A est supposée définie positive. Et $Y = {}^t\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$ où au moins l'un des réels y_k est non nul car $X \neq 0$. D'où la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*,\ t \mapsto \left\|e^{-tD}Y\right\|_2^2 = \sum_{k=1}^n e^{-2\lambda_k t} y_k^2$ est strictement décroissante, donc injective d'une part. D'autre part, elle tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et vers 0 en $+\infty$. Comme elle est continue, elle est surjective d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ceci entraîne l'existence et l'unicité du réel t.

43. RMS 2024 314 X MP MPI

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E. Montrer que :

(a) l'endomorphisme $p \circ q \circ p$ est autoadjoint positif ;

(b) $E = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Ker}\, q + (\mathrm{Im}\, q \cap \mathrm{Ker}\, p)$;

(c) l'endomorphisme $p \circ q$ est diagonalisable ;

(d) le spectre de $p \circ q$ est inclus dans $[0, 1]$.

Solution. —

(a) Les projecteurs p et q sont autoadjoints (car orthogonaux), d'où $(p \circ q \circ p)^* = p^* \circ q^* \circ p^* = p \circ q \circ p$ et, pour tout vecteur $x \in E$, $\langle p \circ q \circ p(x)|x\rangle = \langle q \circ p(x)|p^*(x)\rangle = \langle q(y)|y\rangle$ en notant $y = p(x) = p^*(x)$. Or $\langle q(y)|y\rangle = \|q(y)\|_2^2$ car $y - q(y) \perp q(y)$. D'où $\langle p \circ q \circ p(x)|x\rangle \geq 0$. Donc $p \circ q \circ p \in S^+(E)$.

(b) Pour tous *sev* F et G, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$. En particulier, si $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \operatorname{Ker} q$, alors $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)^\perp = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$ car $F^\perp = \operatorname{Ker} p$ et $G^\perp = \operatorname{Im} q$.

(c) Le *sev* $\operatorname{Im} p$ est stable par $p \circ q$ et $\forall x \in \operatorname{Im} p,\ p \circ q(x) = p \circ q \circ p(x)$ car $p^2 = p$. Or l'endomorphisme $p \circ q \circ p$ est diagonalisable car autoadjoint d'après la première question. Sa restriction au *sev* stable $\operatorname{Im} p$ l'est donc aussi ▷ **proposition IV.39**. Il existe ainsi une base de $\operatorname{Im} p$ formée de vecteurs propres de $p \circ q$. D'après la deuxième question, on peut compléter cette base de $\operatorname{Im} p$ en une base de E en y adjoignant de nouveaux vecteurs pris dans le *sev* $\operatorname{Ker} q + (\operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p)$. Or ces nouveaux vecteurs sont tous des vecteurs propres de $p \circ q$ associés à la valeur propre 0. On obtient ainsi une base de l'*ev* E formée de vecteurs propres de $p \circ q$, ce qui prouve que $p \circ q$ est diagonalisable.

(d) En répondant à la troisième question, on a constaté que les vecteurs propres de $p \circ q$ associés à des valeurs propres autres que 0 appartiennent tous au *sev* $\operatorname{Im} p$ et que leurs valeurs propres sont aussi des valeurs propres de $p \circ q \circ p$. Elles sont donc positives d'après la première question. D'où $\operatorname{Sp}(p \circ q) \subset \mathbb{R}_+$. Enfin, pour tout $x \in E$, $\|q(x)\|_2 \leq \|x\|_2$ car le projecteur q est orthogonal. De même, $\|p(q(x)\|_2 \leq \|q(x)\|_2$. Par transitivité, $\|p \circ q(x)\|_2 \leq \|x\|_2$. D'où $|\lambda| \leq 1$ pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(p \circ q)$.

44. RMS 2024 754 Mines Ponts MP MPI

Soit une fonction $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $120 \left(\int_0^1 f\right)^2 \leq \int_0^1 (f'')^2$.

Solution. — L'hypothèse $\mathcal{C}^2$ autorise deux intégrations par parties : la première donne $\int_0^1 f(x)\,dx = \left[(x - \frac{1}{2})f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx = -\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx$ grâce aux conditions aux bords.

La seconde donne $\int_0^1 \left((x - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx = \left[\left((\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) f'(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) f''(x)\,dx$. Donc $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) f''(x)\,dx$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\left(\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) f''(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right)^2 dx \int_0^1 (f''(x))^2\,dx$. Et le premier facteur vaut $\frac{1}{120}$.

1.4 Espaces vectoriels normés

45. RMS 2011 948 Centrale PC

Mots-clés : continuité d'une application

On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme donnée par $\forall f \in E,\ \|f\|_2 = (\int_0^1 f^2)^{1/2}$. Soient

$$\Phi\colon f \in E \mapsto \int_0^1 f \quad \text{et} \quad \Psi\colon f \in E \mapsto \int_0^1 |f|.$$

Montrer que Φ et Ψ sont des applications continues de $(E, \|\ \ \|_2)$ dans $\mathbb{R}$.

Solution. — Soit $f \in E$: d'une part $|\Phi(f)| \leq \Psi(f)$, d'autre part l'inégalité de Cauchy et Schwarz montre que $\Psi(f) \leqslant \left(\int_0^1 1\right)^{1/2} \times \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2} = \|f\|_2$.

L'application Φ étant de plus linéaire, on en déduit qu'elle est continue. Quant à l'application Ψ, elle n'est pas linéaire. Montrons qu'elle est 1–lipschitzienne, donc continue :

$$\forall (f,g) \in E^2,\ |\Psi(f) - \Psi(g)| = \left|\int_0^1 |f| - |g|\right| \leqslant \int_0^1 ||f| - |g|| \leqslant \int_0^1 |f - g| = \Psi(f - g) \leqslant \|f - g\|_2.$$

46. RMS 2014 661 Mines Ponts PSI

Mots-clés : continuité d'une application linéaire

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \ \|_\infty$. Soient $e \in E$ et $T_e\colon f \in E \mapsto \int_0^1 e(t)f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$. Montrer que T_e est une forme linéaire continue et calculer $|||T_e|||_\infty$, la norme de T_e subordonnée à $\|\ \ \|_\infty$.

Ind. Considérer $f_\varepsilon\colon t \mapsto \frac{e(t)}{|e(t)|+\varepsilon}$, où $\varepsilon > 0$.

Solution. — T_e est linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $|T_e(f)| \leqslant \int_0^1 |e(t)|.\|f\|_\infty = \|e\|_1.\|f\|_\infty$ donc T_e est continue et $|||T_e|||_\infty \leqslant \|e\|_1$.

$T_e(f_\varepsilon) = \int_0^1 \frac{e^2(t)}{|e(t)|+\varepsilon}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(|e(t)| - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{|e(t)|+\varepsilon}\right) \mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 (|e(t)| - \varepsilon)\,\mathrm{d}t = \|e\|_1 - \varepsilon$ et $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$, d'où $|||T_e|||_\infty \geq \|e\|_1 - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $|||T_e|||_\infty \geq \|e\|_1$, donc $|||T_e|||_\infty = \|e\|_1$.

47. RMS 2009 1031 Centrale PC

Mots-clés : continuité d'une application linéaire

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On fixe un réel α dans $[0,1]$.

(a) On pose $f_n\colon x \in [0,1] \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+[n(x-\alpha)]^2}}$. Montrer que $\|f_n\|_2$ tend vers zéro.

(b) L'application $\Phi\colon f \in E \mapsto f(\alpha) \in \mathbb{R}$ est-elle continue pour la norme $\|\ \|_2$?

(c) Existe-t-il un réel $C > 0$ tel que $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_2$?

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Existe-t-il $C > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \|P\|_\infty \leqslant C\|P\|_2$?

Solution. —

(a) On majore le carré de la norme grâce au changement de variable $t = n(x-\alpha)$:

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 f_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_{-n\alpha}^{n(1-\alpha)} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{n}.$$

Par suite, $\|f_n\|_2 = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ tend bien vers zéro.

(b) On montre que l'application Φ n'est pas continue pour la norme $\|\ \|_2$, en utilisant la suite de fonctions (f_n) : elle converge vers zéro pour la norme $\|\ \ \|_2$ mais $\Phi(f_n) = f_n(\alpha) = 1$ pour tout n et ne tend donc pas vers 0.

(c) La réponse est non, et la même suite (f_n) fournit une preuve, puisque $\|f_n\|_\infty = 1$ et $C\|f_n\|_2 = C\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

(d) La réponse est oui, car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie (contrairement à E), donc toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}_n[X]$.

48. RMS 2015 995 CCP PSI

Soit E l'espace des suites bornées à valeurs complexes. Montrer que $N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ et $N'(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}$ sont deux normes sur E. Sont-elles équivalentes ?

Solution. — Soit $u \in E$. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$. Alors $\frac{|u_n|}{2^n} \leqslant \frac{M}{2^n}$ et $\frac{|u_n|}{n!} \leqslant \frac{M}{n!}$, ce qui prouve la convergence des deux séries définissant $N(u)$ et $N'(u)$: les fonctions N et N' sont bien définies. Vérifions les axiomes des normes.

— Une somme de termes positifs étant nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, on a : $N(u) = 0 \iff u = 0$ et $N'(u) = 0 \iff u = 0$.

— On vérifie que $N(\lambda u)|\lambda|N((u)$ et de même pour N'.

— Soient u et v dans E. L'inégalié triangulaire $N(u+v) \leqslant N(u)+N(v)$ résulte de la sommation des inégalités triangulaires $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n|$, préalablement divisées par 2^n, et il est est de même pour N'.

On conclut que N et N' sont deux normes sur E. Il est vrai que $N' \leqslant N$; pour autant, ces deux normes ne sont pas équivalentes. Si elles l'étaient, il existerait $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $N \leqslant \alpha N'$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on considère la suite $e_p = (\delta_{n,p})_{n\in\mathbb{N}} \in E$. On aurait alors

$$\forall p \in \mathbb{N},\quad \frac{N(e_p)}{N'(e_p)} = \frac{1/2^p}{1/p!} = \frac{p!}{2^p} \leqslant \alpha.$$

Or la suite de terme général $\frac{p!}{2^p}$ n'est pas bornée.

49. RMS 2009 977 Centrale PSI

On note $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le déterminant vaut 1. L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel ? une groupe mulitiplicatif ? un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Solution. — $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel car la matrice nulle n'a pas pour déterminant 1. Mais c'est un groupe multiplicatif car : le produit matriciel est associatif et le produit de deux matrices M et N de déterminant 1 a encore pour déterminant $\det M \cdot \det N = 1$; la matrice I_n, qui a pour déterminant 1, est l'élément neutre ; toute matrice M de déterminant 1 est inversible et son inverse a pour déterminant $\frac{1}{\det M} = 1$.

$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque du singleton $\{1\}$, qui est une partie fermée de $\mathbb{R}$, par l'application continue det. À ce titre, c'est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. La matrice tM tend vers la matrice M quand le réel t tend vers 1. Or $\det(tM) = t^n$, ce qui montre que toute boule ouverte centrée en M contient des matrices qui ne sont pas dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Par suite $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas ouvert. Mieux : aucun point de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ n'est intérieur.

50. RMS 2024 102 ENS MP MPI

Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et définie par $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{p+q}$ si $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. Quels sont les points de continuité de f ?

Solution. — En chaque point x rationnel, la fonction n'est pas continue. Par l'absurde : par densité de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de nombres irrationnels u_n convergeant vers x. Si f est continue en $x\in\mathbb{Q}$, alors $f(u_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$. C'est absurde car $f(u_n)=0$ pour tout n et $f(x)\neq 0$.
En chaque point x irrationnel, la fonction est continue. En effet, soit $\varepsilon>0$: il n'y qu'un nombre fini de rationnels $\frac{p}{q}$ tels que $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{p+q}>\varepsilon$ car $\frac{1}{p+q}>\varepsilon \implies p+q<\frac{1}{\varepsilon}$. Dans un certain voisinage de $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, tous les rationnels, et donc tous les réels, ont ainsi une image inférieure à ε. La fonction f a donc pour limite 0 en x, or $f(x)=0$, donc f est continue en x.

1.5 Algèbre générale

51. RMS 2015 384 X ESPCI PC, RMS 2014 1165 CCP PSI

(a) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples.

i. Calculer $\frac{P'(x)}{P(x)}$ pour tout x appartenenant à $\mathbb{R}$ privé des racines de P. En déduire que $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)P''(x)\leqslant P'(x)^2$.

ii. Montrer que, si $\deg P\geq 2$, alors P' est aussi scindé à racines simples. En déduire que, si $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$, alors $a_ka_{k+2}\leqslant a_{k+1}^2$ pour tout $k\in[\![0,n-2]\!]$.

(b) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé. Le polynôme P' l'est-il aussi ?

Solution. —

(a) i. En notant $r_1,\dots,r_n$ les racines de P,

$$\forall x\in\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{r_1,\dots,r_n\},\quad \frac{P'(x)}{P(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-r_k}\cdot$$

Et, en dérivant : $\forall x\in\mathcal{D}$, $\frac{P''(x)P(x)-(P')^2(x)}{P(x)^2}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-r_k)^2}\leqslant 0$, ce qui donne $P''(x)P(x)\leqslant (P')^2(x)$ pour tout $x\in\mathcal{D}$ mais aussi en $r_1,\dots,r_n$ puisque $P(r_k)=0$ et que $(P')^2(r_k)\geqslant 0$.

ii. Soit $n=\deg P\geq 2$: le théorème de Rolle (à énoncer !) assure que, entre deux racines distinctes de P, la dérivée P' s'annule au moins une fois et que, donc, P' possède au moins $n-1$ racines distinctes deux à deux, en fait exactement $n-1$ car $\deg P'=n-1$. Donc P' est scindé à racines simples et il en est de même de $P'',\dots,P^{(n-1)}$. L'inégalité peut donc être appliquée à $P^{(k)}$ pour chaque $k\in[\![0,n-1]\!]$, ce qui donne en $x=0$: $P^{(k)}(0)P^{(k+2)}(0)\leqslant P^{(k+1)}(0)^2$ et donc $k!a_k\times(k+2)!a_{k+2}\leqslant (k+1)!^2a_{k+1}^2$. On en déduit que $a_ka_{k+2}\leqslant\frac{k+1}{k+2}a_{k+1}^2\leqslant a_{k+1}^2$ pour chaque $k\in[\![0,n-2]\!]$.

(b) Si $\deg P<2$, alors P' n'est pas scindé. Supposons désormais que $\deg P=n\geq 2$ et notons r_i $(1\leqslant i\leqslant q)$ les racines, distinctes deux à deux, de P et m_i leur multiplicité : $m_1+\cdots+m_q=n$. Avec le même raisonnement que ci-dessus, on obtient $q-1$ racines de P' deux à deux distinctes et distinctes des r_i. D'autre part, chaque r_i est une racine de P' d'ordre m_i-1. Il reste à compter les racines réelles de P' : $q-1+(m_1-1)+\cdots+(m_q-1)=n-1$ et P' est donc scindé.

Remarque : en dérivant $P=K\prod_{k=1}^{q}(X-r_i)^{m_i}$ (où $K\in\mathbb{R}^*$), on obtient

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{r_1,\dots,r_q\},\quad \frac{P'(x)}{P(x)}=\sum_{k=1}^{q}\frac{m_k}{x-r_k}\cdot$$

Un exercice en rapport : **RMS 2016 465 Mines Ponts PSI**
Soit $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n\geqslant 2$ ayant n racines réelles distinctes deux à deux. Montrer que P n'a pas deux coefficients consécutifs nuls, autrement dit $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $|a_k|+|a_{k+1}|\neq 0$.
Solution. — Si $a_k=a_{k+1}=0$, alors $P^{(k)}(0)=P^{(k+1)}(0)=0$ donc $P^{(k)}$ admet 0 comme racine au moins double. Or $P\in\mathbb{R}[X]$ est scindé à racines simples, donc ses dérivées $P',\dots,P^{n-1}$ le sont aussi. Par conséquent, P ne peut pas être scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

52. RMS 2014 892 Centrale PSI

(a) Soient un réel a et une fonction f continue sur $[a,+\infty[$ et dérivable sur $]a,+\infty[$. On suppose que f s'annule en a et tend vers 0 en $+\infty$: qu'en déduire ? (On pourra utiliser la fonction $x\mapsto f(a+\frac{1}{x}-1)$ pour le prouver.)

(b) Soient $P\in\mathbb{R}[X]$ et $Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}P^{(k)}$. Montrer que, si P n'a pas de racine réelle, alors Q non plus. (On pourra utiliser la fonction $x\mapsto Q(x)e^{-x}$.)

Solution. —

(a) On en déduit qu'il existe $b > a$ tel que $f'(b) = 0$. C'est une variante du théorème de Rolle, qui s'y ramène grâce à la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f(a + \frac{1}{x} - 1)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. Cette fonction est d'une part continue sur $[0,1]$ car f est continue sur $[a, +\infty[$ et $\lim_{+\infty} f = 0 = g(0)$. Elle est d'autre part dérivable sur $]0,1[$ car f est dérivable sur $]a, +\infty[$. Or $g(0) = g(1) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c \in]0,1[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = -\frac{1}{x^2} f'(a + \frac{1}{x} - 1)$, d'où $f'(a + \frac{1}{c} - 1) = 0$. Enfin $a + \frac{1}{c} - 1 > a$ car $c \in]0,1[$.

(b) Supposons que Q a une racine réelle a. Alors la fonction $f \colon x \mapsto Q(x)e^{-x}$ s'annule en a et tend vers 0 en $+\infty$, donc il existe $b > a$ tel que $f'(b) = 0$. Or $P = Q - Q'$, donc $f'(b) = -P(b)e^{-b}$ et $P(b) = 0$. D'où le résultat par contraposée.

53. RMS 2013 288 X ESPCI PC

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$ et $P(0) = 0$.

Solution. — On va démontrer que X est l'unique solution.

Définissons la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n^2 + 1$. Comme a_n est réel et que $x^2 - x + 1$ reste strictement positif sur $\mathbb{R}$ on a $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + 1 > 0$ et la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante donc injective $(m \neq n \Rightarrow a_m \neq a_n)$.

Soit alors P une solution du problème posé. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $P(a_n) = a_n$.

C'est vrai pour $n = 0$ puisque $a_0 = 0$ et $P(0) = 0$ et si c'est vrai pour un entier n donné alors

$$P(a_{n+1}) = P(a_n^2 + 1) = P(a_n)^2 + 1 = a_n^2 + 1 = a_{n+1}.$$

Il s'ensuit que le polynôme $P(X) - X$ est nul car il admet une infinité de racines et donc que $P = X$.

54. RMS 2012 272 X ESPCI PC

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R},\ P_n(\sin^2 t) = \cos(2nt)$ et le déterminer.

Solution. — Si les polynômes P et Q vérifient $\forall t \in \mathbb{R},\ P(\sin^2 t) = \cos(2nt) = Q(\sin^2 t)$, alors $P - Q$ possède une infinité de racines (tous les réels de $[0,1]$), donc il est nul, donc $P = Q$. Ceci démontre l'unicité.

Les formules d'Euler donnent

$$\cos(2nt) = \operatorname{Re}\left((e^{it})^{2n}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} i^k \sin(t)^k \cos(t)^{2n-k}\right) = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} (-1)^p \sin(t)^{2p} \cos(t)^{2n-2p}$$
$$= \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n}{2p} (\sin^2 t)^p (1 - \sin^2 t)^{n-p} = P_n(\sin^2 t),$$

où

$$P_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n}{2p} X^p (1 - X)^{n-p}.$$

Autre méthode — On peut donner une autre expression de P_n en calculant

$$\cos(2nt) = \operatorname{Re}\left((e^{2it})^n\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin(2t)^k \cos(2t)^{n-k}\right) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \sin(2t)^{2p} \cos(2t)^{n-2p}$$
$$= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} 2^{2p} (\sin^2 t)^p (1 - \sin^2 t)^p (1 - 2\sin^2 t)^{n-2p} = P_n(\sin^2 t),$$

où $P_n = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} 2^{2p} X^p (1 - X)^p (1 - 2X)^{n-2p}$.

55. RMS 2013 1048 TPE EIVP PC

Soient a, b dans $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X - a)^n (X - b)^n$.

Donner une expression de la dérivée n-ième de P et en déduire $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$ en fonction de n.

Solution. — Voir une autre méthode pour calculer cette somme dans le corrigé de l'oral n° 121. On note que $(X^n)^{(p)} = \frac{n!}{(n-p)!} X^{n-p}$ pour tout $p \in [\![0, n]\!]$ puis la formule de Leibniz donne

$$P^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [(X-a)^n]^{(k)} [(X-b)^n]^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(n!)^2}{k!(n-k)!} (X-a)^{n-k} (X-b)^k = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-a)^{n-k} (X-b)^k$$

Dans le cas où $a = b = 0$, l'identité précédente s'écrit $P^{(n)} = n! X^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. Par ailleurs, $P = X^{2n}$, donc $P^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!} X^n$ et on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}.$$

56. RMS 2010 606 Mines Ponts PC

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

Solution. — *Analyse.* Toute solution P vérifie

$$P(0) = P(-1) = P(-2) = P(-3) = 0,$$

donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = X(X+1)(X+2)(X+3)Q$.

Synthèse. La propriété recherchée est vérifiée *ssi*

$$X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)Q(X) = X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)Q(X+1),$$

ssi $Q(X) = Q(X+1)$ ce qui équivaut à $Q =$ constante (car le polynôme $Q - Q(0)$ admet une infinité de racines).

Conclusion. Un polynôme P est une solution *ssi* $\exists\lambda \in \mathbb{R},\ P = \lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$.

57. RMS 2011 255 X ENS PSI

Mots-clés : nombre de diviseurs d'un entier

Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit d_n le nombre des diviseurs de n. On pose $D_n = d_1 + \cdots + d_n$.

(a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ ou $a_{i,j} = 1$ si $i|j$ et zéro sinon. Montrer que $a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n}$ est égal à la partie entière de $\frac{n}{i}$.

(b) Montrer que D_n est la somme des éléments de la matrice A_n. En déduire que $D_n \sim n \ln n$.

Solution. —

(a) La somme $k = a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n}$ est le nombre d'entiers $j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i|j$, c'est-à-dire le nombre de multiples de i compris dans $[\![1, n]\!]$. On cherche donc l'entier k tel que $i, 2i, \ldots, ki$ sont $\leqslant n$ et $n < (k+1)i$, ou encore $k \leqslant \frac{n}{i} < n+1$. Par définition de la partie entière, on obtient

$$a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n} = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor.$$

(b) On note s_n la somme de tous les éléments de la matrice A_n, et H_n le n-ième nombre harmonique $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. En effectuant une somme par lignes, la question (a) montre que $s_n = \sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$. Comme $x - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $nH_n - n \leqslant s_n \leqslant nH_n$. Or $H_n \sim \ln n$ (il s'agit d'une comparaison série-intégrale appliquée à la fonction continue et décroissante $t \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{t}$) et on en déduit que

$$s_n \sim n \ln n.$$

On peut aussi calculer s_n en effectuant une somme par colonnes. Tout d'abord, la définition des $a_{i,j}$ montre que $a_{1,j} + \cdots + a_{n,j}$ est le nombre des diviseurs de j compris entre 1 et n, c'est-à-dire le nombre d_j des diviseurs de j (car $j \leqslant n$). Alors $s_n = \sum_{j=1}^{n} d_j = D_n$. On en déduit finalement que

$$D_n \sim n \ln n.$$

Le quotient $\frac{D_n}{n}$ est le nombre moyen de diviseurs d'un entier dans $[\![1, n]\!]$. Le résultat démontré dit que ce nombre moyen est équivalent à $\ln(n)$.

58. RMS 2012 268 X ESPCI PC

Mots-clés : nombre de diviseurs d'un entier

(a) Soit n un entier strictement positif dont la décomposition en facteurs premiers est $\prod_{j=1}^{r} p_j^{\alpha_j}$. Déterminer le nombre de diviseurs de n.

(b) Quels sont les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ ayant un nombre impair de diviseurs ?

Solution. —

(a) Si la décomposition de n en facteurs premiers est $\prod_{j=1}^{r} p_j^{\alpha_j}$, les diviseurs de n sont les $\prod_{j=1}^{r} p_j^{\beta_j}$ avec $\beta_j \in [\![0, \alpha_j]\!]$ pour tout j. L'ensemble des diviseurs de n possède donc $\prod_{j=1}^{r}(1 + \alpha_j)$ éléments.

(b) Un produit d'entiers étant impair si et seulement si tous ses facteurs sont impairs, on déduit de la question précédente que les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ recherchés sont ceux tels que α_j est pair pour tout j, c'est-à-dire les carrés.

59. RMS 2009 1009 Centrale PC

Mots-clés : polynômes stabilisant $\mathbb{Z}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\binom{X}{n}$ ou H_n le polynôme $\frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$. On pose $\Delta\colon P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}[X]$.

(a) On dit qu'un polynôme P stabilise $\mathbb{Z}$ si $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(k) \in \mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n stabilise $\mathbb{Z}$.

(b) Déterminer $\operatorname{Ker} \Delta$ et calculer $\Delta(H_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ stabilisant $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que $P = c_0 H_0 + \cdots + c_n H_n$.

Solution. —

(a) Soit $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Alors $H_j(k) = \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!}$ est un entier relatif car
- si $k \geqslant j$, on obtient $\binom{k}{k-j}$, qui est bien entier ;
- si $k < 0$, alors $H_j(k) = (-1)^j H_j(j-k-1)$, et on est ramené au cas précédent ;
- si $0 \leqslant k < j$, alors zéro figure parmi les facteurs du numérateur, donc $H_j(k) = 0$.

(b) Si $\Delta(P) = 0$, alors $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(k) = P(0)$, d'où $Q(k) = 0$, en notant $Q(X) = P(X) - P(0)$. Le polynôme Q est nul car il possède une infinité de racines. Donc le polynôme $P(X) = P(0)$ est constant. Réciproquement : si P est constant, alors $\Delta(P) = 0$. Finalement $\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{R}_0[X]$.

Puis $\Delta(H_n) = H_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta(H_0) = 0$.

(c) On démontre la propriété par récurrence sur n. Si $n = 0$, alors $P = c_0 \in \mathbb{R}_0[X]$ stabilise $\mathbb{Z}$ implique $c_0 \in \mathbb{Z}$.

On suppose la propriété établie pour $n-1$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ stabilisant $\mathbb{Z}$. Alors $\Delta(P)$ aussi, et comme $\Delta(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\Delta(P) = \sum_{j=1}^n c_j H_{j-1}$.

Comme $\sum_{j=1}^n c_j H_j$ est l'un des antécédents de $\sum_{j=1}^n c_j H_{j-1}$ par Δ, et comme $\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$, on peut affirmer qu'il existe une constante *réelle* c_0 telle que $P = \sum_{j=1}^n c_j H_j + c_0$.

Enfin, comme $P(0) = c_0$ et P stabilise $\mathbb{Z}$, on peut dire que $c_0 \in \mathbb{Z}$.

Un exercice en rapport : **RMS 2010 870 Centrale PC**

Mots-clés : polynômes stabilisant $\mathbb{Q}$

Déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Solution. — Ce sont les polynômes de $\mathbb{Q}[X]$, c'est-à-dire à coefficients rationnels. D'une part, ces polynômes conviennent. D'autre part, on montre par récurrence sur le degré qu'il n'y en a pas d'autres :

Si P est une constante réelle a_0, comme $P(Q) = \{a_0\}$, la condition $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ implique effectivement que a_0 soit rationnel. Supposons la propriété vraie pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Soit $P = a_n X^n + Q$, avec $a_n \neq 0$ et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, tel que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Alors $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ vérifie aussi $[\Delta(P)](\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Or $\Delta(P) = n a_n X^{n-1} + \cdots$ est de degré $n-1$. L'hypothèse de récurrence assure que $\Delta(P)$ est à coefficients rationnels, et en particulier que $n a_n \in \mathbb{Q}$, donc que $a_n \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, l'hypothèse $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ se traduit par $Q(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$, et l'hypothèse de récurrence assure que Q est à coefficients rationnels. Finalement $P \in \mathbb{Q}[X]$.

60. RMS 2024 14 ENS MP MPI

Mots-clés : formule de Grassmann

Soit G un groupe fini. Si X et Y sont des parties non vides de G, alors on pose $X^{-1} = \{x^{-1},\ x \in X\}$ et $XY = \{xy,\ (x,y) \in X \times Y\}$. Dans la suite, X désigne une partie non vide de G.

(a) On suppose que $|XX| < 2|X|$. Montrer que $XX^{-1} = X^{-1}X$.

(b) On suppose que $|XX^{-1}| < \frac{3}{2}|X|$. Montrer que $X^{-1}X$ est un sous-groupe de G.

Solution. — On utilisera la formule de Grassmann $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$.

(a) Soit $(a,b) \in X^2$. Pour montrer que $XX^{-1} \subset X^{-1}X$, on cherche $(x,y) \in X^2$ tel que $ab^{-1} = x^{-1}y$, *i.e.* $xa = yb$. Il suffit de montrer que $Xa \cap Xb$ est non vide. Or Xa et Xb sont des parties de XX de même cardinal que X. De $|XX| < 2|X|$, on tire que $|Xa \cap Xb| > 0$.

(b) L'ensemble $X^{-1}X$ contient le neutre et est stable par inversion. Il reste à montrer la stabilité par produit, *i.e.* que, pour tout $(a,b,x,y) \in X^4$, $ab^{-1}xy^{-1} \in XX^{-1}$.

Or Xa^{-1} et Xb^{-1} sont des parties de XX^{-1} de même cardinal que X. De $|XX^{-1}| < \frac{3}{2}|X|$, on tire que $|Xa^{-1} \cap Xb^{-1}| > \frac{1}{2}|X|$. Il existe donc strictement plus de $\frac{1}{2}|X|$ couples $(a_i, b_i) \in X^2$ tels que $a_i a^{-1} = b_i b^{-1}$, *i.e.* $a^{-1}b = a_i^{-1}b_i$.

De même, il existe strictement plus de $\frac{1}{2}|X|$ couples $(x_j, y_j) \in X^2$ tels que $x^{-1}y = x_j^{-1}y_j$. Au moins un des a_i est donc égal à l'un des x_j. Et alors $a^{-1}bx^{-1}y = a_i^{-1}b_i x_j^{-1}y_j = a_i^{-1}y_j \in X^{-1}X$.

61. RMS 2024 424 X ESPCI PC

On veut montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m) \in \{-1; +1\}^m$ tel que $n = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k k^2$.

(a) Prouver la propriété pour tout $n \in \{1; 2; 3\}$.

(b) Développer les polynômes $(X+3)^2 - (X+1)^2$ et $(X+4)^2 - (X+2)^2$ et conclure.

Solution. —

(a) $1 = 1^2$, $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$ et $3 = -1^2 + 2^2$.

(b) $(X+3)^2-(X+1)^2=4X+8$ et $(X+4)^2-(X+2)^2=4X+12$, d'où $(k+1)^2-(k+2)^2-(k+3)^2+(k+4)^2=4$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

La division euclidienne de n par 4 donne $n=4q+r$ et $r<4$. On décompose alors r en utilisant la première question et on écrit $4q$ en sommant q expressions consécutives de 4 obtenues précédemment.

62. RMS 2024 519 Mines Ponts MP MPI

Déterminer tous les couples $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tels que $3^m=8+n^2$.

Solution. — Analyse : en réduisant modulo 2, il vient $1\equiv 3^m\equiv n^2[2]$, donc n est impair. Et en réduisant modulo 4, $(-1)^m\equiv 3^m\equiv n^2\equiv 1[4]$ (car n est impair) donc m est pair. L'équation équivaut donc à $(3^{m/2}+n)(3^{m/2}-n)=8$. D'où l'on tire que $(3^{m/2}+n,3^{m/2}-n)\in\{(4,2);(8,1)\}$ et même que $(3^{m/2}+n,3^{m/2}-n)=(4,2)$ car $3^{m/2}+n$ et $3^{m/2}-n$ ont la même parité. D'où, s'il il y a une solution, alors c'est $(m,n)=(2,1)$.

Synthèse : $3^2=8+1^2$, donc l'équation $3^m=8+n^2$ possède une unique solution $(m,n)=(2,1)$.

63. RMS 2024 12 ENS MP MPI

Soient un entier $n\in\mathbb{N}^*$ et une transposition (ab) telle que $1\leq a<b\leq n$.

(a) Soit un entier $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que la transposition (12) et le cycle $c=(12\cdots n)$ engendrent le groupe symétrique S_n.

(b) Montrer que la transposition $\tau=(13)$ et le cycle $c=(1234)$ n'engendrent pas le groupe symétrique S_4. (On pourra s'intéresser à la parité de $\tau(i)-i$ et de $c(i)-i$ pour tout $i\in[\![1,4]\!]$.)

(c) Montrer que la transposition (ab) et le cycle $c=(12\cdots n)$ engendrent S_n si, et seulement si, $b-a$ et n sont premiers entre eux.

Solution. — Notation : on confond chaque élément k de $\mathbb{Z}$ avec l'unique élément de $[\![1,n]\!]$ congru à k modulo n. On rappelle que, pour toute permutation $\sigma\in S_n$, $\sigma(ab)\sigma^{-1}=(\sigma(a)\sigma(b))$.

(a) Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $c^k(12)c^{-k}=(k+1k+2)$ appartient au sous-groupe G engendré par (12) et c. Puis $(kk+1)(1k)(kk+1)=(1k+1)$ prouve par récurrence que chaque transposition $(1k)$ appartient à G. Et $(1j)(1k)(1j)=(jk)$ prouve que G contient toutes les transpositions. Or les transpositions engendrent S_n, donc $G=S_n$.

(b) Pour tout i, $\tau(i)-i$ est pair et $\sigma(i)-i$ est impair. Par suite, pour chaque f appartenant au sous-groupe G engendré par τ et σ, la parité de $f(i)-i$ est un invariant au sens où elle ne dépend pas de i. Ce n'est pas le cas si $f=(12)$, d'où $(12)\notin G$, donc $G\neq S_n$.

(c) Si $b-a$ n'est pas premier avec n, alors on pose le *pgcd* $d=(b-a)\wedge n$ et le sous-groupe G engéndré par (ab) et $(12\cdots n)$. Comme à la question précédente, pour tout $f\in G$, $f(i)-i$ est invariant modulo n, d'où $(12)\notin G$, donc $G\neq S_n$.

Réciproquement, supposons que $b-a$ est premier avec d. Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $c^k(ab)c^{-k}=(k+ak+b)$ appartient au sous-groupe G engendré par (ab) et c. En particulier, $(1,1+b-a)\in G$. Puis $(1+k(b-a)1+(k+1)(b-a))(11+k(b-a))(1+k(b-a)1+(k+1)(b-a))=(11+(k+1)(b-a))$ prouve par récurrence que chaque transposition $(11+k(b-a))$ appartient à G. Or il existe k tel que $k(b-a)=1$ car $b-a$ est premier avec d par hypothèse, d'où $(12)\in G$, donc $G=S_n$ d'après la première question.

2 Analyse

2.1 Suites & séries numériques

64. RMS 2013 993 CCP PSI

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$. Nature de la série de terme général u_n.

Solution. — On remarque que $0 \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 0$, puis que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$ car $e^{-u_n} \leq 1$ si $u_n \geq 0$. Par suite, (u_n) converge vers 0, par le théorème des gendarmes.

D'où e^{-u_n} tend vers 1, donc on a $u_{n+1} \sim \frac{1}{n+1}$ donc la série $\sum u_n$ diverge.

65. RMS 2006 1124 CCP PC

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série convergente à termes strictement positifs. Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} e^{-1/u_n}$ convergent.

Solution. — On applique l'inégalité $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ avec $a = \sqrt{u_n}$ et $b = \frac{1}{n}$. On obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right).$$

Comme les deux séries de termes généraux u_n et $\frac{1}{n^2}$ convergent, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge aussi.

On sait que $\lim_{-\infty} xe^x = 0$. Comme la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, alors la suite (u_n) converge vers zéro. Comme de plus $u_n > 0$ pour tout n, la suite de terme général $-\frac{1}{u_n}$ diverge vers $-\infty$. Par croisances comparées, la suite de terme général $-\frac{e^{-1/u_n}}{u_n}$ converge vers zéro, donc $e^{-1/u_n} = o(u_n)$. Comme la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument, $\sum_{n\geqslant 0} e^{-1/u_n}$ converge aussi.

66. RMS 2013 1061 CCP PC

Soit (u_n) définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.

(a) Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

(b) Étudier la limite de $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n^3}$. En déduire la nature de la série de terme général u_n^3.

(c) En étudiant $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$, montrer que la série de terme général u_n^2 diverge.

Solution. —

(a) La suite de terme général $u_{n+1} = \sin(u_n)$ est minorée par 0 (on le montre par récurrence) et décroissante (car $\forall x \geq 0,\ \sin(x) \leq x$). Donc elle converge. Sa limite est un point fixe de sin, or le seul point fixe de sin est 0 (on le prouve en étudiant la fontion $x \mapsto x - \sin x$). Donc la suite (u_n) converge vers 0.

(b) Un développement limité fournit $\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{3!} + \mathrm{o}(1)$ donc, puisque $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, on a $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n^3} \to -\frac{1}{6}$ quand $n \to +\infty$.
On en déduit l'équivalence $u_n^3 \sim_{n\to+\infty} -6(u_{n+1}-u_n)$ à termes positifs, et la somme partielle de la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge (somme partielle télescopique) car (u_n) converge, donc par équivalence, la série de terme général u_n^3 converge.

(c) (Voir aussi la dernière question de l'exercice 67.) On a $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = \ln(\frac{\sin u_n}{u_n}) \sim \frac{\sin u_n}{u_n} - 1 = \frac{\sin u_n - u_n}{u_n} \sim -\frac{1}{6}u_n^2$, à termes négatifs. La série de terme général u_n^2 a même nature que la série de terme général $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, et celle ci diverge (on le voit par somme partielle télescopique, sachant que $\ln(u_n) \to -\infty$).

67. RMS 2014 668 Mines Ponts PSI

Soit la suite définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

(a) Étudier la limite de cette suite.

(b) Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

(c) Déterminer la nature de la série de terme général a_n^2.

(d) Étudier la série de terme général $\ln(\frac{a_{n+1}}{a_n})$. En déduire la nature de la série de terme général a_n.

Solution. —

(a) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$, d'où $a_{n+1} \leqslant a_n$ pour tout n, donc (a_n) est décroissante et, par récurrence, est minorée par 0, donc (a_n) converge. Sa limite vérifie $\ell = 1 - e^{-\ell}$ donc $\ell = 0$.

(b) La série $\sum(-1)^n a_n$ est alternée et vérifie les hypothèses du CSSA : elle converge.

(c) On effectue un développement limité : puisque $a_n \to 0$, $a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2}{2} + \mathrm{o}\left(a_n^2\right)$ donc $a_n^2 \sim 2(a_n - a_{n+1})$ dont la série converge car ses sommes partielles sont télescopiques et la suite (a_n) converge.

(d) (Voir aussi la dernière question de l'exercice 66.) $S_n = \sum_{k=0}^n \ln \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ln a_{n+1} - \ln a_0 \to -\infty$ donc la série diverge. En reprenant le développement limité précédent, on a $\ln \frac{a_{n+1}}{a_n} \sim -\frac{a_n}{2}$ (< 0). On en déduit que $\sum a_n$ diverge.

68. RMS 2013 688 Mines Ponts PC

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ bornée et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $\alpha = \sup_{\mathbb{R}_+} f$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f^n est intégrable. Soit $u_n = \int_0^{+\infty} f^n$.

(b) Si $\alpha < 1$, montrer que la série de terme général u_n est convergente.

(c) Si $\alpha > 1$, montrer que la série de terme général u_n est divergente.

Solution. —

(a) Comme $0 \leqslant f^n \leqslant \alpha^{n-1} f$ et comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors f^n aussi, donc la suite (u_n) est bien définie.

(b) Si $\alpha < 1$, l'inégalité de la question précédente montre que $0 \leqslant u_n \leqslant u_1 \alpha^{n-1}$, qui est le terme général d'une série géométrique convergente. On en déduit que $\sum u_n$ converge.

(c) Si $\alpha > 1$, il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(t_0) > 1$. On choisit λ tel que $1 < \lambda < f(t_0)$. La continuité de f donne l'existence d'un intervalle $J \subset \mathbb{R}_+$ non banal, contenant t_0, tel que $f \geqslant \lambda$ sur J. Si $\ell > 0$ est la longueur de J, la positivité de f montre que

$$u_n = \int_0^{+\infty} f^n \geqslant \int_J f^n \geqslant \ell \lambda^n.$$

Le minorant étant un terme général de série géométrique divergente, on conclut que $\sum u_n$ diverge.

69. RMS 2012 1327 CCP PC

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 1–périodique et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\, \mathrm{d}t$.

Montrer que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, $\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t = 0$.

Solution. —

Le changement de variable $t = n + x$ dans l'intégrale qui définit u_n et la périodicité de f montrent que

$$u_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{n+x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x + \int_0^1 f(x) \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x f(x)}{n(n+x)}\, \mathrm{d}x.$$

On pose $M = \int_0^1 x|f(x)|\, \mathrm{d}x$. Comme $0 \leqslant \frac{1}{n+x} \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $x \in [0, 1]$, l'inégalité triangulaire montre que $|\int_0^1 \frac{x f(x)}{n(n+x)}\, \mathrm{d}x| \leqslant \frac{M}{n^2}$, ce qui achève de prouver que

$$u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Soit $\langle f \rangle = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$ la valeur moyenne de la fonction 1–périodique f. Si cette valeur moyenne est non nulle, alors $u_n \sim \frac{\langle f \rangle}{n}$, donc la série de terme général u_n diverge. Si elle est nulle, $u_n = \mathrm{O}(\frac{1}{n^2})$, donc la série en question converge.

70. RMS 132 1163 CCP PSI 2021, RMS 130 1236 CCP PSI 2019

Soient deux suites réelles (a_n) positive et (u_n) définie par $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2} \right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Comparer $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{1}{2} a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Déterminer un équivalent de a_n dans le cas où $u_n = \frac{n}{n+1}$.

(c) La convergence de la suite (u_n) implique-t-elle la convergence de la série $\sum a_n$? Et réciproquement ?

Solution. —

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n \right)$. Et $u_n^2 + a_n^2 \leq (u_n + a_n)^2$ car u_n et a_n sont positifs, donc $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2} a_n$.

(b) Si $u_n = \frac{n}{n+1}$, alors $a_n = 2\sqrt{u_n}\sqrt{u_{n+1} - u_n} \sim \frac{2}{n}$.

(c) La deuxième question prouve par un contre-exemple, que la convergence de la suite (u_n) n'implique pas la convergence de la série $\sum a_n$.
Réciproquement : supposons que la série $\sum a_n$ converge. Les suites $u_{n+1} - u_n$ et a_n sont positives et, d'après la première question, $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2} a_n$. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge. D'où la suite $S_n = \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k)$ des sommes partielles converge. Donc $u_{n+1} = u_0 + S_n$ converge.

71. RMS 2007 912 CCP PSI

Soient, pour tout réel $t \geq 1$, $f(t) = \frac{t}{t^2+t+1}$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin t \, \mathrm{d}t$.

Étudier le sens de variation de la fonction f, le sens de variation de la suite $(|u_n|)$ et la nature de la série $\sum u_n$.

Solution. — Comme f est positive et comme la fonction sinus est du signe de $(-1)^n$ sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, la série $\sum u_n$ est alternée.

De plus, $|u_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) |\sin t| \, \mathrm{d}t$. On cherche à montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0 en décroissant.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et décroissante sur $[1, +\infty[$ car

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad f'(t) = \frac{t^2+t+1-t(2t+1)}{(t^2+t+1)^2} = \frac{-t^2+1}{(t^2+t+1)^2} \leqslant 0.$$

Alors, pour tout $n \geqslant 1$, le changement de variable $t = u + \pi$ (qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ dans la deuxième intégrale montre que

$$|u_n| - |u_{n+1}| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)|\sin t| \, \mathrm{d}t - \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} f(t)|\sin t| \, \mathrm{d}t = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (f(t) - f(t+\pi)) \, |\sin t| \, \mathrm{d}t \geqslant 0,$$

puisque f est décroissante sur $[1, +\infty[$ et que $n\pi \geqslant 1$. On en déduit que $(|u_n|)_{n \geqslant 1}$ décroît.

Enfin, la majoration de $|\sin|$ par 1 et de f par $f(n\pi)$ sur $[n\pi, (n+1)\pi]$ montrent que $|u_n| \leqslant \pi f(n\pi) \sim \frac{1}{n}$, donc que $\lim u_n = 0$.

On conclut que $\sum u_n$ converge d'après le théorème spécial des séries alternées.

72. RMS 2008 980 Télécom Sud Paris PSI, RMS 2013 657 Mines Ponts PC, RMS 2014 751 Mines Ponts PC

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n \cos(u_{n-1})}{n}$. Nature de la série de terme général u_n ?

Solution. — Pour $n \geqslant 1$, on a $|u_n| \leqslant \frac{1}{n}$, donc la suite de terme général u_n tend vers zéro, donc on dispose du développement limité $\cos(u_{n-1}) = 1 - \frac{u_{n-1}^2}{2} + \mathrm{o}(u_{n-1})^2$. Par suite

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n u_{n-1}^2}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{u_{n-1}^2}{n}\right) = x_n + y_n + \mathrm{o}(y_n),$$

avec des notations évidentes pour les suites (x_n) et (y_n). La série $\sum x_n$ converge, par application du théorème des séries alternées. Comme $|y_n| \leqslant \frac{1}{2n(n-1)^2}$ pour tout $n \geqslant 2$, d'où $y_n + \mathrm{o}(y_n) = O(\frac{1}{n^2})$, donc la série $\sum(y_n + \mathrm{o}(y_n))$ converge absolument.

Finalement $\sum u_n$ converge.

73. RMS 2012 328 X ESPCI PC

Mots-clés : transformation d'Abel

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que (u_n) est décroissante et que la série de terme général u_n converge.

(a) Montrer que $\sum_{k=0}^n u_k = (n+1)u_n + \sum_{k=1}^n k(u_{k-1} - u_k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que la suite de terme général $(n+1)u_n$ converge. En déduire que $nu_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Solution. — (La transformation d'Abel est l'analogue discret de l'IPP, c'est-à-dire qu'elle est aux séries ce que l'IPP est aux intégrales.) Comme la série converge, la suite (u_n) converge vers zéro, et comme elle décroît, elle est positive. On note S la somme de la série de terme général u_n. On effectue une transformation d'Abel sur la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$: la positivité des u_n permet d'écrire que

$$\begin{aligned} S \geqslant S_n &= \sum_{k=0}^n (k+1-k)u_k = \sum_{k=0}^n (k+1)u_k - \sum_{k=0}^n ku_k = \sum_{k=1}^{n+1} ku_{k-1} - \sum_{k=0}^n ku_k = (n+1)u_n + \sum_{k=1}^n k(u_{k-1} - u_k) \\ &\geqslant \sum_{k=1}^n k(u_{k-1} - u_k). \end{aligned}$$

Comme la suite (u_n) décroît, la série $\sum k(u_k - u_{k-1})$ est à termes positifs, et l'inégalité ci-dessus montre que ses sommes partielles sont majorées, donc elle converge. Par différence, on en déduit que la suite de terme général $(n+1)u_n = S_n - \sum_{k=1}^n k(u_{k-1} - u_k)$ converge. On note ℓ sa limite. Si cette limite est non nulle, alors $u_n \sim \frac{\ell}{n+1} \sim \frac{\ell}{n}$, et la série $\sum u_n$ diverge, ce qui est impossible. Par suite, $\ell = 0$, et l'égalité $(n+1)u_n = nu_n + u_n$ avec (u_n) de limite nulle montre que

$$\lim(nu_n) = 0.$$

74. RMS 2013 344 X ESPCI PC

(a) Soient deux réels a et b tels que $b > a$. Étudier la limite de la suite des réels $(b + \sqrt[3]{n}\,)^3 - (a + \sqrt[3]{n}\,)^3$.

(b) Montrer que l'ensemble $E = \left\{ \sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n},\ (m, n) \in \mathbb{N}^2 \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

SOLUTION. —

(a) Utiliser l'identité $y^3 - x^3 = (y - x)(y^2 + xy + x^2)$.

(b) Il s'agit de montrer que, si $a < b$ dans $\mathbb{R}$, alors il existe $x \in E$ tel que $a \leq x \leq b$.
On cherche des entiers naturels m et n, tels que $a + \sqrt[3]{n} < \sqrt[3]{m} < b + \sqrt[3]{n}$ ou encore ($x \mapsto x^3$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$) tels que

$$\left(a + \sqrt[3]{n}\,\right)^3 \leq m \leq \left(b + \sqrt[3]{n}\,\right)^3.$$

Or la longueur L_n de l'intervalle $](a + \sqrt[3]{n}\,)^3, (b + \sqrt[3]{n}\,)^3[$ tend vers $+\infty$ d'après la première question. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $L_{n_0} > 1$ et aussi (quitte à augmenter n_0) tel que $a + \sqrt[3]{n_0} \geq 0$. Cela assure l'existence de m_0, entier naturel, dans l'intervalle $[(a + \sqrt[3]{n_0})^3, (b + \sqrt[3]{n_0})^3]$. Pour finir, $x_0 = \sqrt[3]{m_0} - \sqrt[3]{n_0} \in E \cap [a, b]$.

75. RMS 2024 722 Mines Ponts MP MPI

Soient (u_n) une suite décroissante de réels positifs et (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

SOLUTION. — $0 \leq \frac{n}{2} u_n \leq \sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq n} u_k$ car la suite (u_n) est positive et décroissante. Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq n} u_k = S_n - S_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ tend vers 0 car les sommes partielles S_n et $S_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ convergent vers la même limite finie. D'après le théorème des gendarmes, $\frac{n}{2} u_n$ tend donc vers 0.

D'où $0 \leq n u_n$ est inférieur à 1 à partir d'un certain rang. D'où $v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n} \geq \frac{1}{1+n}$ à partir du même rang. Donc la série $\sum v_n$ diverge.

2.2 Intégrales

76. RMS 2014 1247 ICNA PSI

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{x}})\, \mathrm{d}x$ converge.

SOLUTION. —

- La fonction $x \mapsto x^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{x}})$ est continue positive sur $]0, +\infty[$.
- Comme $x^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{x}}) \sim x^\alpha$ quand $x \to 0$, l'intégrale $\int_0^1 x^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{x}})\, \mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.
- Comme $x^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{x}}) \sim x^{\alpha - 1/2}$ quand $x \to +\infty$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{x}})\, \mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha < -1/2$.

Conclusion :

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{x}})\, \mathrm{d}x \text{ converge} \iff -1 < \alpha < -\frac{1}{2}.$$

77. RMS 2014 1249 ENSAM PSI

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et F sa primitive qui s'annule en 0.

(a) Montrer que : si $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\, \mathrm{d}t$ converge, alors $\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\, \mathrm{d}t \geqslant \frac{F(x)}{1+x}$ pour tout $x \geq 0$.

(b) Montrer que les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\, \mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\, \mathrm{d}t$ sont de même nature et comparer leur valeur.

SOLUTION. —

(a) On suppose que $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\, \mathrm{d}t$ converge. En utilisant la croissance de F (c'est la primitive d'une fonction positive) et la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$, on montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\, \mathrm{d}t \geqslant F(x) \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = F(x) \left[-\frac{1}{1+t} \right]_x^{+\infty} = \frac{F(x)}{1+x}.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Une intégration par parties sur le segment $[0, x]$ (justifiée car les fontions $t \mapsto F(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$) montre que

$$\int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{F(t)}{1+t} \right]_0^x + \int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2}\, \mathrm{d}t = \frac{F(x)}{1+x} + \int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2}\, \mathrm{d}t.$$

- On suppose que $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
  De la question précédente, on déduit que : majoré par un reste d'intégrale convergente, le quotient positif $\frac{F(x)}{1+x}$ tend vers zéro quand $x \to +\infty$.
  On en déduit que $\int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge et a la même limite que $\int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$. Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

- On suppose que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge. Comme $f \geqslant 0$, il en est de même de F, et la relation ci-dessus montre que

$$\int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

  La fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ étant croissante et majorée, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le théorème de la limite mnotone.
- En conclusion : les deux intégrales ont la même nature et, quand elles convergent, elles ont la même valeur.

78. RMS 2013 376 X ESPCI PC, RMS 2014 761 Mines Ponts PC

Mots-clés : théorème de Cesàro pour les fonctions

(a) Soit F une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ admettant une limite finie L en $+\infty$. Montrer que $\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

(b) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente. Montrer que $\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Solution. —

(a) On veut montrer que $\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,dt - L = \frac{1}{x}\int_0^x [F(t)-L]\,dt$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$. Autrement dit : que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \geq c$, $\left|\frac{1}{x}\int_0^x [F(t)-L]\,dt\right| \leq \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$:
— d'une part, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $t \geq a$, $|F(t)-L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ car $F(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} L$ par hypothèse, d'où $\frac{1}{x}\int_a^x |F(t)-L|\,dt \leq \frac{x-a}{x}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$;
— d'autre part, il existe $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \geq b$, $\frac{1}{x}\int_0^a |F(t)-L|\,dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$ car $\frac{1}{x}\int_0^a |F(t)-L|\,dt$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.
Donc, en posant $c = \max(a,b)$, on a montré que, pour tout $x \geq c$,

$$\frac{1}{x}\int_0^x |F(t)-L|\,dt = \frac{1}{x}\int_0^a |F(t)-L|\,dt + \frac{1}{x}\int_a^x |F(t)-L|\,dt \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Et donc, par l'inégalité triangulaire, $\left|\frac{1}{x}\int_0^x [F(t)-L]\,dt\right| \leq \frac{1}{x}\int_0^x |F(t)-L|\,dt \leq \varepsilon$ pour tout $x \geq c$.

(b) Soit F la primitive nulle en zéro de f. Par hypothèse, F possède une limite finie en $+\infty$, qu'on note L et qui vaut $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Une intégration par parties conduit à

$$\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left([tF(t)]_0^x - \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t\right) = F(x) - \frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $F(x)$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$, la moyenne $\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t$ converge vers un réel L d'après la question précédente. La différence ci-dessus tend donc vers $L - L = 0$ quand x tend vers $+\infty$.

Remarque — La première question est une version pour les intégrales du théorème de Cesàro pour les suites, qui affirme que : si une suite (u_n) tend vers un réel L, alors la moyenne $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n u_k$ tend aussi vers L. Et qui se démontre de la même manière. Soit $\varepsilon > 0$:

— d'une part, $\exists a \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq a,\ |u_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ car $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$ par hypothèse, d'où $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=a}^n |u_k - L| \leq \dfrac{n-a}{n}\dfrac{\varepsilon}{2} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$;

— d'autre part, $\exists b \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq b,\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^a |u_k - L| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ car $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^a |u_k - L|$ tend vers zéro quand n tend vers ∞.

Donc, en posant $c = \max(a,b)$, on a montré que, pour tout $n \geq c$,

$$\left|\frac{\sum_{k=0}^n u_k}{n} - L\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^n (u_n - L)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^n |u_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

79. RMS 2015 1003 CCP PSI

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} xe^{-\lfloor x\rfloor}\,\mathrm{d}x$.

SOLUTION. — La fonction $f\colon x\mapsto xe^{-\lfloor x\rfloor}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et $0\leqslant f(x)\leqslant xe^{-x+1}=\mathrm{o}(e^{-x/2})$ quand $x\to+\infty$, donc l'intégrale étudiée converge. On a

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_n^{n+1} xe^{-\lfloor x\rfloor}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_n^{n+1} xe^{-n}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-n}\left[\frac{x^2}{2}\right]_n^{n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)e^{-n}.$$

Posons $g\colon x\in\mathbb{R}_+\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n+1}=\frac{x}{1-x^2}$. Cette fonction est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1. Or on peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence. D'où : $\forall x\in]-1,1[,\ g'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^{2n}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$, donc (parce que $\mathrm{e}^{-1}\in]-1,+1[)$: $\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\mathrm{e}^{-n}=g'(e^{-1/2})=\frac{1+\mathrm{e}^{-1}}{(1-\mathrm{e}^{-1})^2}$. On conclut que

$$\int_0^{+\infty} xe^{-\lfloor x\rfloor}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)e^{-n}=\frac{1}{2}\frac{1+e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}.$$

Un exercice en rapport : **RMS 2011 1140 Télécom Sud Paris PC**

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\lfloor x\rfloor e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente et qu'elle vaut $\frac{1}{e-1}$.

SOLUTION. — On note f la fonction $x\in[0,+\infty[\mapsto\lfloor x\rfloor e^{-x}$. La continuité par morceaux de f et la limite $\lim_{+\infty}x^2f(x)=0$ montrent que f est intégrable sur $[0,+\infty[$. On calcule ensuite $\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n\in\mathbb{N}$, en effectuant le changement d'indice $j=k+1$:

$$\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}ke^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}k\left(e^{-k}-e^{-(k+1)}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}ke^{-k}-\sum_{j=1}^{n}(j-1)e^{-j}=\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k}-(n-1)e^{-n}.$$

Comme $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\lim_{n\to+\infty}(n-1)e^{-n}=0$, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\lfloor x\rfloor e^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{+\infty}e^{-k}=\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}=\frac{1}{e-1}.$$

80. RMS 2014 781 Mines Ponts PC & RMS 2016 852 Centrale PC

Soit $F\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Former une équation différentielle vérifiée par F et en déduire la limite de F en 0^+.

(c) Déterminer un équivalent de F en $+\infty$.

SOLUTION. — On pose $f\colon(x,t)\in(\mathbb{R}_+^*)^2\mapsto\frac{e^{-t}}{x+t}$.

(a) Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. On applique le théorème de dérivation sous le signe intégral en utilisant la domination

$$\forall(x,t)\in[a,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*,\qquad\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=\left|(-1)\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\right|\leqslant\varphi(t):=\frac{e^{-t}}{(a+t)^2}.$$

sans oublier auparavant de montrer que, pour chaque x, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable . On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ F'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}$.

(b) $F'(x)=-\frac{1}{x}+F(x)$ en intégrant par parties. D'où $F'(x)-F(x)=-\frac{1}{x}$. On résout cette équation différentielle en faisant varier la constante et on trouve ainsi que : $F(x)=\left(K-\int_1^x\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)e^x$, où K est une constante. Or $\int_1^x\frac{e^{-t}}{t}\,dt\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}-\infty$. Donc $F(x)\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}+\infty$.

(c) $\frac{1}{x}-F(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+t}\right)dt=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\frac{t}{x(x+t)}\,dt=o\left(\frac{1}{x}\right)$ quand $x\to+\infty$

car $x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\frac{t}{x(x+t)}\,dt=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\frac{t}{x+t}\,dt\leq\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\,dt$, o u l'intégrale $\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est bien convergente.

81. RMS 2013 917 Centrale PC

Soit $F\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{t\mathrm{e}^{-t}}{t+x}\,dt$.

(a) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Calculer les intégrales $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt$. Étudier la limite de $1 - xF(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Conclure.

Solution. —

(a) Soit, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $f(x,t) = \frac{te^{-t}}{t+x}$. On applique le théorème de continuité sous le signe intégral en utilisant la domination $|f(x,t)| \leq e^{-t}$. On conclut que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $a > 0$. On applique le théorème de dérivation sous le signe intégral en utilisant la domination

$$\forall (x,t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|(-1)\frac{te^{-t}}{(x+t)^2}\right| \frac{te^{-t}}{(a+t)^2} \leqslant \varphi(t) := \frac{te^{-t}}{a^2}.$$

Cette fonction φ est bien intégrable sur $[0, +\infty[$ car $te^{-t} = te^{-t/2}e^{-t/2} = \mathrm{o}(e^{-t/2})$ quand t tend vers $+\infty$.
On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt = 1$ et $\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt = 2$.
$1 - xF(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t}\left(1 - \frac{x}{t+x}\right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{t^2}{t+x}\,dt$. D'où $0 \leq 1 - xF(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt$. Donc $0 \leq 1 - xF(x) \leq \frac{2}{x}$.
D'où $1 - xF(x) \to 0$ quand x tend vers $+\infty$. Donc $F(x) \sim \frac{1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

82. RMS 2016 795 Centrale PSI

On considère la fonction $F\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cdot \frac{\operatorname{sh} t}{t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de F.

(b) Déterminer la limite de F en $+\infty$.

Solution. —

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-xt} \cdot \frac{\operatorname{sh} t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, positive, et $\frac{\operatorname{sh} t}{t} \to 1$ quand $t \to 0$ donc l'intégrale est faussement impropre en 0. Et comme $\operatorname{sh} t \sim \frac{e^t}{2}$ quand $t \to +\infty$, on obtient

$$e^{-xt}\frac{\operatorname{sh} t}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{(1-x)t}}{2t}.$$

Lorsque $x > 1$, on a donc $e^{-xt}\frac{\operatorname{sh} t}{t} = \mathrm{O}_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ donc la fonction est intégrable. Lorsque $x \leqslant 1$, on a au contraire $\frac{1}{t} = \mathrm{O}_{+\infty}(e^{-xt}\frac{\operatorname{sh} t}{t})$ et comme $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable, alors l'intégrale diverge. Finalement F est définie sur

$$D_F =]\,1\,; +\infty\,[\,.$$

(b) Pour $x > a > 1$, on peut par exemple encadrer l'intégrande par $\forall t > 0$, $0 \leqslant e^{-xt}\frac{\operatorname{sh} t}{t} = e^{-at}\frac{\operatorname{sh} t}{t}e^{-(x-a)t} \leqslant Me^{-(x-a)t}$, où $M = \sup\left(e^{-at}\frac{\operatorname{sh} t}{t}, t \in \mathbb{R}_+^*\right)$. En effet la fonction $t \mapsto e^{-at}\frac{\operatorname{sh} t}{t}$ est bornée, puisque continue et de limites finies en 0 (1) et en $+\infty$ (0).
En intégrant, il vient $0 \leqslant F(x) \leqslant M\int_0^{+\infty} e^{-(x-a)t}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{x-a}$. Par le théorème des gendarmes,

$$F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Autre méthode — Soit une suite (u_n) tendant vers $+\infty$: d'une part, $e^{-u_nt}\frac{\operatorname{sh} t}{t} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour tout $t \in]0, +\infty[$; d'autre part, $u_n \geq 2$ à partir d'un certain rang, d'où $e^{-u_nt}\frac{\operatorname{sh} t}{t} \leq e^{-2t}\frac{\operatorname{sh} t}{t}$. Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\frac{\operatorname{sh} t}{t}\,dt$ est convergente (car on a montré ci-dessus que $F(2)$ est défini).
Donc $\int_0^{+\infty} e^{-u_nt}\frac{\operatorname{sh} t}{t}\,dt$ tend vers zéro d'après le théorème de la convergence dominée.
Ceci est vrai pour toute suite (u_n) tendant vers $+\infty$, donc $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\operatorname{sh} t}{t}\,dt$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$ d'après la caractérisation séquentielle de la limite.

2.3 Suites & séries de fonctions

83. CCP PSI 2021

(a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3}\sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1+t^3}\,dt$ est convergente.

(b) Montrer que la suite des réels J_n converge vers le réel $K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\,dt$.

(c) À l'aide d'un changement de variable, prouver que $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\,dt$ et en déduire la valeur du réel K.

SOLUTION. — Soit $f_n(t) = \frac{n^{1/3}\sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1+t^3}$.

(a) $|f_n(t)| \leq \frac{n^{1/3}}{1+t^3} \sim \frac{n^{1/3}}{t^3}$ quand t tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale J_n est convergente d'après le critère de Riemann.

(b) Chaque fontion f_n est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et la suite (f_n) converge simplement vers la fonction continue par morceaux $f\,:\,t \mapsto \frac{t}{1+t^3}$ car $\sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right) \sim \frac{t}{n^{1/3}}$ quand n tend vers ∞. De plus, pour tout $t \in [0,+\infty[$, $|f_n(t)| \leq \frac{t}{1+t^3}$ car $|\sin x| \leq x$ pour tout réel x positif. D'où $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ tend vers $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ d'après le théorème de la convergence dominée. Donc la suite des réels J_n converge vers le réel K.

(c) Le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$, qui est bien $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $]0,+\infty[$, prouve que $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\,dt$. Par suite $2K = \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3}\,dt$. Or $\frac{1+t}{1+t^3} = \frac{1}{t^2-t+1}$ et $t^2-t+1 = (t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[1+\frac{4}{3}(t-\frac{1}{2})^2\right]$. On se ramène, par le changement de variable $t \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}}(t-\frac{1}{2})$, qui est bien $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $]0,+\infty[$, à un calcul d'arctangente pour montrer que $\int_0^{\infty} \frac{1}{t^2-t+1}\,dt = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

84. RMS 2013 1005 CCP PSI, RMS 2008 982 TPE PSI, RMS 2013 1005 CCP PSI, RMS 2015 748 Mines Ponts PC & RMS 2016 849 Centrale PC

Mots-clés : primitives itérées

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_0 = f$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a,b]$, $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[a,b]$ et déterminer sa somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ en résolvant une équation différentielle.

SOLUTION. —

- Comme f est continue sur $[a,b]$, f est bornée. Posons $M = \|f\|_\infty$. Pour $x \in [a,b]$, $|f_1(x)| \leqslant \int_a^x M\,\mathrm{d}t = M(x-a)$, donc $|f_2(x)| \leqslant \int_a^x M(t-a)\,\mathrm{d}t = \frac{M}{2}(x-a)^2$, et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{M}{n!}(x-a)^n$.
 Il en résulte $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{M}{n!}(b-a)^n$ et, comme $\sum \frac{M}{n!}(b-a)^n$ converge, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_{n+1}\colon x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ puisque f_n est continue, et $f'_{n+1} = f_n$. L'étude faite ci-dessus montre que $\sum f'_{n+1}$ est normalement convergente sur $[a,b]$ et que $\sum f_{n+1}$ est simplement convergente. On en déduit que $T := \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} = S - f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $T' = (S-f)' = S = T + f$ sur le segment $[a,b]$
- Il s'agit de résoudre l'équation différentielle
$$T' - T = f$$
 avec la condition initiale $T(a) = 0$, puisque $f_n(a) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $x \mapsto e^x(\int_a^x e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t + c)$, ou c est une constante réelle. La condition initiale donne $c = 0$. Finalement,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x) + T(x) = f(x) + e^x \int_a^x e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

85. RMS 2009 1050 Centrale PC

Quel est l'ensemble de définition de $f\,:\,x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$? Cette fonction est-elle continue ?

SOLUTION. — Soit $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$: si $x = -1$, alors $f_n(x)$ n'est pas défini pour tout n. Si $x = 1$, alors $f_n(x) = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers 0, d'où la série numérique $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement. Si $|x| > 1$, alors $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$, d'où la série numérique $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement. Si $|x| < 1$, alors $|f_n(x)| \underset{n\to\infty}{\sim} |x|^n$, or la série numérique $\sum |x|^n$ converge car c'est une série géométrique de raison $|x| \in]-1,+1[$, d'où la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument. En conclusion, le réel $f(x)$ est défini si, et seulement si, $x \in]-1,+1[$.

Soit $a \in]0,+1[$: pour tout $x \in]-a,+a[$, $|f_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{1-|x|^n} \leq \frac{a^n}{1-a^n}$. Or la série numérique $\sum \frac{a^n}{1-a^n}$ converge car $\frac{a^n}{1-a^n} \sim a^n$. Ceci montre que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a,a]$, Or chaque f_n est continue sur $[-a,a]$. D'où f est continue sur $[-a,a]$ pour tout a tel que $0 < a < 1$, donc sur $]-1,1[$.

86. RMS 2016 937 CCP PSI

Montrer que $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$ est défini pour tout réel x et que, pour tout $x \neq 0$, $S(x) = S(\frac{1}{x})$. Étudier la limite de S en $+\infty$.

SOLUTION. —

Soit $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$. Si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0$. Si $x \neq 0$, alors $\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{1}{x^n+x^{-n}}$. Or, $\forall t \in]0,+\infty[$, $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$, donc $|\frac{1}{x^n+x^{-n}}| \leqslant \frac{1}{2}$ et $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n^2}$ (valable également pour $x = 0$) ce qui prouve que la série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

De $\frac{1}{x^n+x^{-n}}$, on tire que $f_n\left(\frac{1}{x}\right) = f_n(x)$ et donc que $S\left(\frac{1}{x}\right) = S(x)$ pour tout $x \neq 0$.

On a déjà établi la convergence normale sur $\mathbb{R}$, et comme les f_n sont continues, S l'est aussi.

En particulier, S est continue en 0, d'où $S(x) \to S(0) = 0$ quand $x \to 0^+$. Or $S\left(\frac{1}{x}\right) = S(x)$, donc $S(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Autre méthode : L'équivalent $f_n(x) \sim \frac{1}{n^2 x^n} \to 0$ quand $x \to +\infty$, et la convergence normale de la série montrent, avec le théorème d'interversion somme-limite, que
$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0.$$

87. RMS 2016 513 Mines Ponts PSI

Soit $S\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

(a) Montrer que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier le sens de variation de S.

(b) Étudier les limites de S en 0 et en $+\infty$.

(c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$.

(d) Déterminer un équivalent de S en 0^+ et en $+\infty$.

Solution. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n\colon x \in \mathbb{R}+^* \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

(a) Fixons $x \geq 0$: la série numérique $\sum f_n(x)$ est absolument convergente car $\left|\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}\right| \leq \frac{1}{n!}$ et la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge. Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}$. Soit $a > 0$:
$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n'(x)| \leqslant \frac{1}{n!(a+n)^2},$$
terme général d'une série convergente. Donc la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Il résulte du théorème de dérivation terme à terme que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$. Et
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}.$$
Cette série vérifie le critère spécial des séries alternées, donc la somme est du signe de son premier terme, à savoir négatif. Donc S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Du critère spécial des séries alternées résulte l'encadrement de la somme par deux sommes partielles successives :
$$\forall x \geq 0, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq S(x) \leq \frac{1}{x}.$$
D'où $\lim_{0^+} S = +\infty$ et $\lim_{+\infty} S = 0$

Remarque : on en tire aussi que $S(x) \sim \frac{1}{x}$ $(x \to 0^+)$ car $xS(x) \to 1$ $(x \to 0^+)$, ce qui est demandé à la dernière question.

Autre méthode : $S(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ et $\forall x > 0$, $\forall n \geqslant 1$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{nn!}$, donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, d'après le théorème de la double limite :

— d'une part, sa somme tend vers la limite finie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nn!}$ quand x tend vers 0^+ et il en résulte que $\lim_{0^+} S = +\infty$;

— d'autre part, $\lim_{+\infty} S = 0$.

(c)
$$\begin{aligned} xS(x) - S(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+1+n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(x+n)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+n)}{n!(x+n)} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

(d) De $xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$, on tire que :

— d'une part, $xS(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{e} + S(1)$ par continuité de S en 1, or $S(1) = 1 - \frac{1}{e}$, d'où $xS(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$, donc $S(x) \sim \frac{1}{x}$ $(x \to 0^+)$;

— d'autre part, $xS(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{e} + 0$ car $\lim_{+\infty} S = 0$, donc $S(x) \sim \frac{1}{xe}$ $(x \to +\infty)$.

88. RMS 2013 606 Mines Ponts PSI, RMS 2016 512 Mines Ponts PSI & RMS 2016 583 Mines Ponts PC

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2x}{x^2+n^2}$. Montrer que la fonction $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. Étudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que la fonction f est continue mais que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Solution. —

Les fonctions f_n étant impaires, f l'est aussi.

- Pour $x=0$, la série est clairement nulle, donc convergente.
  Pour $t \neq 0$, on a $|\frac{2t}{n^2+t^2}| \sim \frac{2|t|}{n^2}$ quand $n \to +\infty$, qui est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$.
- On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $\varphi_x : t \in [1,+\infty[\mapsto \frac{2x}{x^2+t^2}$ est continue et décroissante, d'où, en comparant série et inté grale : $\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$, soit

$$\pi - 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 2\left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_{t=1}^{+\infty} \leqslant f(x) \leqslant 2\left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_{t=0}^{+\infty} = \pi.$$

  En passant à la limite quand x tend vers l'infini, on obtient $\lim_{+\infty} f = \pi$ et, par imparité, $\lim_{-\infty} f = -\pi$.
- Pour tout $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$, en posant $c = \max\{|a|,|b|\}$, on a : $|\frac{2t}{n^2+x^2}| \leqslant \frac{2c}{n^2}$, la série de fonctions converge donc normalement sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- Mais cette série ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$: par comparaison à l'intégrale, $R_n(x) \geqslant \int_{n+1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{n+1}{x}$, donc

$$\|R_n\|_\infty \geqslant \sup_{x\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{n+1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

  Autre méthode : Chaque terme tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Si la convergence était uniforme, alors le théorème de la double limite permettrait de conclure que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Or on a prouvé que $f(x)$ tendait vers π. C'est absurde. Donc la convergence n'est pas uniforme.

89. RMS 2016 371 X ESPCI PC

Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-n^2 x}$.

(a) Montrer que la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

(b) Étudier la limite de f en $+\infty$.

(c) Montrer que $\lim_{0^+} f = +\infty$. La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

Solution. —

(a) Si $x>0$, alors $f_n(x) \leqslant e^{-nx}$ et la série géométrique $\sum e^{-nx}$ converge car sa raison e^{-x} appartient à $]-1,+1[$. Donc la série $\sum f_n(x)$ converge. Finalement,
Soit $a>0$: pour tout $x \in [a,+\infty[$, $0 \le f_n(x) \le f_n(a)$ car f_n est décroissante, ce qui prouve la convergence normale sur $[a,+\infty[$. Or chaque f_n est continue sur $[a,+\infty[$, d'où f est continue sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc continue sur $]0,+\infty[$.

(b) La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1,+\infty[$. Comme $\lim_{+\infty} f_n = 0$ si $n \ge 1$ et $\lim_{+\infty} f_0 = 1$, le théorème de la double limite prouve que $\lim_{+\infty} f = 1$.

(c) (Voir aussi la question c de l'exercice 90.) La fonction f est décroissante sur $]0,+\infty[$ (car chaque f_n l'est), le théorème de la limite monotone garantit donc l'existence de $\lim_{0^+} f$.
La positivité des f_n montre que $f \geqslant \sum_{k=0}^n f_k$. Comme on sait désormais que les deux membres de l'inégalité ont une limite en 0^+, on peut écrire que

$$\lim_{0^+} f \geqslant \sum_{k=0}^{n} \lim_{0^+} f_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\lim_{0^+} f = +\infty$.
Pour chaque n, $\lim_{0^+} f_n = 1$. S'il y avait convergence uniforme sur $]0,+\infty[$, le théorème de la double limite conclurait que la série $\sum 1$ converge. C'est absurde.

90. RMS 2016 938 CCP PSI & RMS 2015 666 Mines Ponts PSI

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{-nx})$.

(a) Montrer que f est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

(b) Étudier la limite de f en $+\infty$.

(c) Étudier la limite de f en 0^+. (On pourra vérifier que $\forall t \in [0,1],\ \ln(1+t) \geqslant \frac{t}{2}$.)

Solution. —

(a) Pour tout $x>0$, $u_n(x) = \ln(1+e^{-nx}) \sim e^{-nx}$ quand $n \to +\infty$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente, d'où f est définie sur $]0,+\infty[$.
Soit $a>0$. Pour tout $x \in [a,+\infty[$, $0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(a)$ donc $\sum u_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$. Comme les u_n sont continues, f est continue sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc sur $]0,+\infty[$.

(b) On a $u_0(x) = \ln 2$ et pour $n \geqslant 1$, $\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$. Comme $\sum u_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$, on peut intervertir :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2.$$

(c) (Voir aussi la question c de l'exercice 89.) Pour la limite en 0, c'est un peu plus compliqué : les u_n sont décroissantes donc f l'est aussi donc f admet une limite ℓ en 0, finie ou $+\infty$. On établit que $\forall t \in [0,1],\ \ln(1+t) \geqslant \frac{t}{2}$ à l'aide du théorème des accroissements finis ou par une étude des variations. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + e^{-nx}) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} e^{-kx} = \frac{1}{2}\frac{1 - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \underset{x\to 0}{\to} n+1.$$

L'inégalité large $f(x) \geqslant S_n(x)$ passe à la limite, d'où : $\ell \geqslant n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc

$$\ell = +\infty.$$

91. RMS 2008 987 ENSAM PSI

Soient deux fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et g continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que :

$$n\int_0^1 f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(0)\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Solution. — Soit $I_n = n\int_0^1 f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t$. Le changement de variable $u = nt$ montre que $I_n = \int_0^n f(\frac{u}{n})g(u)\,\mathrm{d}u$. On définit sur $\mathbb{R}_+$ une suite de fonctions (h_n) par

$$h_n(u) = \begin{cases} f(\frac{u}{n})g(u) & \text{si } 0 \leqslant u \leqslant n, \\ 0 & \text{si } n < u. \end{cases}$$

La suite (h_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction continue $f(0)g$. Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, il existe M tel que $\forall t \in [0,1]$, $|f(t)| \leqslant M$. La suite h_n vérifie alors l'hypothèse de domination $|h_n| \leqslant M|g|$ avec g intégrable, et le théorème de convergence dominée montre que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = f(0)\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

92. RMS 2015 1013 CCP PSI

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}$.

Solution. — Commençons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par un changement de variable sur $nU_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$: on pose $u = x^n, \mathrm{d}u = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x, x \mapsto x^n$ est $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ vers $[0,1]$. Alors

$$nU_n = \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{u}}{1+u}\,\mathrm{d}u.$$

Appliquons le théorème de convergence dominée à nU_n.

- On a la convergence simple de la suite $(f_n : u \mapsto \frac{\sqrt[n]{u}}{1+u})$ vers la fonction *cpm* $f\colon u \mapsto \frac{1}{1+u}$ si $u \in]0,1]$ et 0 si $u = 0$.

- La domination suivante est satisfaite : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall u \in [0,1], |f_n(u)| \leqslant \frac{1}{1+u}$ avec $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ continue, $\geqslant 0$, et intégrable sur $[0,1]$.

Par théorème de convergence dominée, on a donc $\lim_{n\to+\infty} nU_n = \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = [\ln(1+u)]_0^1 = \ln 2$, et on en déduit que

$$U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}.$$

Autre méthode — Commençons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par une intégration par parties : $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 x\frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\left[x\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ car $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$, d'où $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$.

93. RMS 2010 849 Centrale PSI

(a) Étudier la convergence de $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

(b) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

SOLUTION. — Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $f(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}$.

(a) L'équivalent entre fonctions positives $f(x) \sim -\ln x$ quand x tend vers zéro montre que f est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$. Par ailleurs, $\lim_1 f = \frac{1}{2}$ car $\ln x \sim x-1$ quand x tend vers 1 : la fonction f est prolongeable par continuité en 1, donc elle est intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$. Finalement, f est intégrable sur $]0,1[$.

(b) On sait que $\forall x \in]0,1[,\ f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \ln x$. On pose $f_n(x) = x^{2n}\ln x$ pour tout $x \in]0,1[$. Comme $|f_n| \leqslant |\ln|$ sur $]0,1[$ et comme $\ln$ est intégrable sur $]0,1[$, on en déduit que f_n est intégrable. On vérifie ensuite que la série de terme général $\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge pour pouvoir appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.

Une intégration par parties (qu'il faudrait écrire sur $[\varepsilon, 1]$ avec $\varepsilon > 0$, puis passer à la limite quand ε tend vers zéro), donne

$$\int_0^1 |x^{2n}\ln x|\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x^{2n}\ln x\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln x\right]_0^1 + \frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

La série de terme général $\frac{1}{(2n+1)^2}$ étant convergente, on en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

94. RMS 2016 951 TPE PSI

Après avoir justifié l'existence de l'intégrale, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}$.

SOLUTION. — Pour tout $x \geqslant 0$, $|e^{-x}\cos\sqrt{x}| \leq e^{-x}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ cobverge, d'où la convergence absolue de l'intégrale étudiée. De plus, $\cos\sqrt{x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ donc

$$e^{-x}\cos\sqrt{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

avec $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n e^{-x}$. On montre par récurrence avec une intégration par partie que $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n!$ donc $\int_0^{+\infty}|u_n(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{(2n)!}$, qui est le terme général d'une série convergente, par la règle de D'ALEMBERT. On en déduit, avec le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}.$$

95. RMS 2011 1150, CCP PC, RMS 2014 1262 Écoles des Mines PSI

Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{\ln t\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

SOLUTION. — Pour tout $t \in]0,1[$, on pose $f(t) = \frac{\ln t\ln(1-t)}{t}$. Comme $f(t) \sim -\ln t$ quand t tend vers zéro, la règle sur les équivalents de fonctions à signe fixe montre que f est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$. Comme $f(t) \sim (t-1)\ln(1-t)$ tend vers 0 quand t tend vers 1, on en déduit que f est prolongeable par continuité en 1, donc intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$. Par suite, l'intégrale I converge.

Le développement en série entière du logarithme montre que, pour tout $t \in]0,1[$, on a $f(t) = -\ln t\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{n}$. On pose $f_n\colon t \in]0,1[\mapsto -\ln t\frac{t^{n-1}}{n}$ de sorte que la série de fonctions continues par morceaux $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $]0,1[$. De plus chaque f_n est continue et intégrable sur $]0,1]$: c'est clair pour $f_1 = -\ln$ qui est intégrable d'après le cours, et cela résulte de l'égalité $\lim_0 f_n = 0$ pour $n \geqslant 2$. Par ailleurs, $f_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$, donc

$$\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = -\left[\ln t\frac{t^n}{n^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{n^2}\,\mathrm{d}t = 0 + \left[\frac{t^n}{n^3}\right]_0^1 = \frac{1}{n^3}.$$

L'intégration par parties est justifiée (vérifier en intégrant par parties sur $[\varepsilon, 1]$, puis faire tendre ε vers zéro). Comme la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$ converge, le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque montre que f est intégrable sur $]0,1[$ (ce que l'on savait déjà) et que

$$I = \int_0^1\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.$$

2.4 Séries entières

96. RMS 2015 1009 ENSAM PSI

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^*}$ avec $a_1 \geqslant 1$. On pose $P_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$.

(a) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [0,1]$ tel que $P_n(x_n) = 1$.

(b) Montrer que $P_{n+1}(x_n) \geq 1$. En déduire que la suite (x_n) est décroissante et qu'elle converge.

(c) On note $\ell = \lim x_n$ et on suppose que $\ell > 0$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur à ℓ.

Solution. —

(a) La fonction P_n est continue et $P_n(0) = 0$ et $P_n(1) = \sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant 1$, donc il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $P_n(\alpha) = 1$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. De plus, $P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} > 0$ pour tout $x \in [0,1]$, la fonction P_n donc strictement croissante, par suite elle est injective et finalement le réel α est unique. On le note x_n.

(b) On calcule

$$P_{n+1}(x_n) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_n^k = \sum_{k=1}^{n} a_k x_n^k + a_{n+1} x_n^{n+1} = 1 + a_{n+1} x_n^{n+1} \geqslant 1 = P_{n+1}(x_{n+1}).$$

Or la fonction P_{n+1} est croissante, donc $x_n \geqslant x_{n+1}$. La suite (x_n) est décroissante, minorée par 0 donc elle converge.

(c) Soit $0 \leqslant x < \ell = \inf(x_n)$; alors $\forall n \in \mathbb{N}, x < x_n$ donc, parce que la fonction P_n est croissante, $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(x) \leqslant P_n(x_n) = 1$. D'où les sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ de la série numérique à termes positifs sont majorées, donc cette série est convergente. On en déduit que $x \leqslant R$. Or ceci est vrai pour tout $0 \leqslant x < \ell$, donc

$$R \geqslant \ell.$$

97. RMS 2011 1092 CCP PSI

Déterminer, suivant $a \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière de terme général $\arctan(n^a) x^n$.

Solution. — On note R rayon de convergence cherché, et on pose $u_n(x) = \arctan(n^a) x^n$.

Comme $|u_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2} |x|^n$ pour tous a, n et x, on conclut que la série converge si $|x| < 1$, donc que $R \geqslant 1$.

Soit maintenant x tel que $|x| > 1$. On détermine un équivalent pour n tendant vers l'infini.

— Si $a > 0$, on a $|u_n(x)| \sim \frac{\pi}{2} |x|^n$.
— Si $a = 0$, on a $|u_n(x)| \sim \frac{\pi}{4} |x|^n$.
— Si $a < 0$, on a $|u_n(x)| \sim n^a |x|^n$

Dans les trois cas, $|u_n(x)|$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, donc la série diverge grossièrement. Finalement,

$$R = 1.$$

98. RMS 2013 1017 CCP PSI

(a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ et calculer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ pour tout $x \in]-R, +R[$.

(b) Montrer que, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

(c) Montrer que $\pi = 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^{2n+1}$.

(d) Majorer l'erreur commise en approchant π par la somme partielle d'ordre N de la série précédente.

Solution. —

(a) La règle de D'Alembert donne $R = 1$. Pour $x \in]-1,1[$, on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$ car on peut dériverer terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x + C$. En $x = 0$, on trouve $C = 0$, donc

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan x.$$

(b) On utilise $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

(c) On a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^{2n+1} = \arctan(\sqrt{2}-1)$. On pose $a = \arctan(\sqrt{2}-1) \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$. Alors $\tan(2a) = 1$, en utilisant $\tan a = \sqrt{2}-1$ et la question (b), donc $a = \frac{\pi}{8}$, d'où l'on déduit que

$$\pi = 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}.$$

(d) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(\sqrt{2}-1)^{2n+1}$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées car la suite $\frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}$ tend vers 0 en décroissant. Alors
$$\left|\frac{\pi}{8} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}(\sqrt{2}-1)^{2n+1}\right| \leqslant \frac{(\sqrt{2}-1)^{2N+3}}{2N+3}.$$

99. RMS 2009 989 Centrale PSI

Soit (a_n) une suite de réels. On note R le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$ et R' celui de la série de terme général $\sin(a_n)x^n$.

Montrer que $R' \geqslant R$ et qu'il y a égalité si $R > 1$.

Solution. — On utilise la majoration $|\sin u| \leqslant |u|$, valable pour tout nombre réel u. On en déduit que $\forall (x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $|\sin(a_n)x^n| \leqslant |a_n x^n|$. Si $|x| < R$, alors la série $\sum a_n x^n$ converge absolument, donc il en est de même de la série $\sum \sin(a_n)x^n$ donc $|x| \leqslant R'$. Ceci montre que
$$R' \geqslant R.$$

Si l'on suppose de plus que $R > 1$, alors la série $\sum a_n$ converge, d'où la suite (a_n) tend vers zéro, d'où $\sin(a_n) \sim a_n$, donc les deux séries entières ont le même rayon de convergence :
$$R' = R.$$

100. RMS 2015 749 Mines Ponts PC

Soit (a_n) une suite complexe. On suppose que $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, que $\sum a_{2n} z^n$ a un rayon de convergence $R_1 > 0$ et que $\sum a_{2n+1} z^n$ a un rayon de convergence $R_2 > 0$. Exprimer R en fonction de R_1 et R_2.

Solution. — Si $|z|^2 < R_1$, alors la série de terme général $a_{2n}(z^2)^n = a_{2n} z^{2n}$ converge. De même, si $|z|^2 < R_2$, alors la série de terme général $z \times a_{2n+1}(z^2)^n = a_{2n+1} z^{2n+1}$ converge. Par conséquent, si $|z|^2 < \min(R_1, R_2)$, c'est-à-dire si $|z| < \min(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2})$, alors la série de terme général $a_n z^n$ converge, et on en déduit que
$$R \geqslant \min\left(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2}\right).$$

Si $|z| > \min(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2})$, alors au moins une des deux suites $(a_{2n} z^{2n})$ ou $(a_{2n+1} z^{2n+1})$ n'est pas bornée, donc la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, donc la série $\sum a_n z^n$ diverge, donc $R \leqslant \min(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2})$. On conclut que
$$R = \min\left(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2}\right).$$

101. RMS 132-709 Mines-Ponts PSI 2021

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R strictement positif.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

(b) On pose $b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$. Montrer que la série entière $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence R' supérieur ou égal à 1. Puis prouver que $R' = \max(1, R)$.

Solution. —

(a) $a_n \left(\frac{R}{2}\right)^n$ tend vers 0, d'où $\left|\frac{a_n}{n!} z^n\right| = \left|a_n \left(\frac{R}{2}\right)^n\right| \cdot \left|\frac{(2z/R)^n}{n!}\right|$ est inférieur ou égal $\left|\frac{(2z/R)^n}{n!}\right|$ à partir d'un certain rang. Or la série $\sum \frac{x^n}{n!}$, avec $x = |2z/R|$, converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ est infini.

(b) $|b_n| \leq 1$, d'où R' est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série $\sum z^n$, qui vaut 1. On distingue trois cas :
- si $R > 1$, alors $a_n \longrightarrow 0$, d'où $|a_n| \sim |b_n|$, donc $R' = R$;
- si $R < 1$, alors $R' \leq 1$ car (par l'absurde) $R' > 1 \implies b_n \longrightarrow 0 \implies |a_n| = \frac{|b_n|}{1-|b_n|} \longrightarrow 0 \implies R \geq 1$;
- si $R = 1$, alors $R' = 1$ car (par l'absurde) $R' > 1 \implies b_n \longrightarrow 0 \implies |a_n| \sim |b_n| \implies R = R'$.

Donc $R' = \max(1, R)$.

102. RMS 2013 379 X ESPCI PC

Soient $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k-1}{2k}\right)$.

(a) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.

(b) Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1, +1[$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f sur $]-1, +1[$.

(c) Calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-1, +1[$.

Solution. —

(a) Par le critère de D'Alembert.

(b) D'après le théorème de dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on a $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = x f'(x)$. On remarque que $a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} a_n$ ou encore $2(n+1)a_{n+1} = 2na_n + a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En multipliant par x^n avec $|x| < 1$ et en sommant (les séries entières qui apparaissent ont toute 1 pour rayon de convergence), on obtient

$$2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = 2f'(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2xf'(x) + f(x).$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

$$2(1-x)y' - y = 0.$$

(c) Les solutions sur $]-1,1[$ de cette équation différentielle sont les fonctions telles qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in]-1,1[$, $y(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{1-x}}$. Comme $y(0) = \alpha$ et comme $f(0) = a_0 = 1$, et comme $a_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Remarque : On vérifie en effet que $(1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (-x)^n$, avec

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2} - n + 1\right) = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = a_n.$$

103. RMS 2011 1145 CCP PC, RMS 2012 1333 CCP PC, RMS 2013 1062 CCP PC & RMS 2016 782 Centrale PSI

Mots-clés : nombre de dérangements

Soit $(d_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n)$.

(a) Calculer d_2 et d_3. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $\frac{n!}{3} \leqslant d_n \leqslant n!$ et en déduire le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\frac{d_n}{n!} x^n$.

(b) Pour tout $x \in]-R,R[$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $\forall x \in]-R,R[$, $(1-x)S'(x) = xS(x)$.

(c) En déduire une expression de $S(x)$ en fonction de x et exprimer d_n comme une somme en fonction de n.

Solution. —

(a) On obtient $d_2 = 1$ et $d_3 = 2$. On démontre par récurrence forte que $(\mathcal{P}_n)$: $\frac{n!}{3} \leqslant d_n \leqslant n!$ est vraie.
La propriété $(\mathcal{P}_2)$ est vraie car $\frac{2!}{3} = \frac{2}{3} \leqslant d_2 = 1 \leqslant 2!$, et $(\mathcal{P}_3)$ est vraie car $\frac{3!}{3} = 2 \leqslant d_3 = 2 \leqslant 3!$. Supposons que $(\mathcal{P}_k)$ soit vraie pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n+1$. Alors

$$\frac{(n+2)!}{3} = \frac{n+1}{3}[(n+1)! + n!] \leqslant d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n) \leqslant (n+1)[(n+1)! + n!] = (n+2)!,$$

donc $(\mathcal{P}_{n+2})$ est vraie.
Ceci montre que $\frac{|x|^n}{3} \leqslant \frac{d_n}{n!}|x|^n \leqslant |x|^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les séries de terme généraux $|x|^n/3$ et $|x|^n$ étant convergentes si et seulement si $|x| < 1$, on en déduit que

$$R = 1.$$

(b) On multiplie la relation $d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n)$ par $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, et on somme pour n variant de zéro à l'infini. Comme les sommes de séries entières sont dérivables terme à terme sur leur intervalle ouvert de convergence, on obtient, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_{n+2}}{(n+1)!} x^{n+1} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_{n+2}}{(n+2)!} x^{n+2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(S(x) - \frac{d_0}{0!} - \frac{d_1}{1!}x\right) = S'(x) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_{n+1}}{n!} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^{n+1} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1}\right) + x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n \\ &= xS'(x) + xS(x).\end{aligned}$$

Cette relation se réécrit sous la forme $\forall x \in]-R,R[$, $(1-x)S'(x) = xS(x)$.

(c) La résolution, sur l'intervalle $]-1,1[$, de l'équation différentielle homogène $y'(x)+\frac{x}{x-1}y(x) = y'(x)+(1+\frac{1}{x-1})y(x) = 0$ donne les solutions suivantes : $x \mapsto \lambda e^{-x}/(1-x)$, où λ est une constante réelle. La valeur $S(0) = d_0 = 1$ montre que $\lambda = 1$, donc que

$$\forall x \in]-1,1[\,, \quad S(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}\cdot$$

L'égalité ci-dessus montre que $S(x)$ est le produit de Cauchy des deux séries $\sum(-x)^n/n!$ (série exponentielle, de rayon de convergence $+\infty$) et $\sum x^n$ (série géométrique, de rayon de convergence 1). Le théorème relatif au produit de Cauchy de deux séries entières affirme que $\sum(d_n/n!)x^n$ a un rayon de convergence $\geqslant 1$, ce que l'on savait déjà, et que $d_n/n! = \sum_{k=0}^{n} e_k f_{n-k}$, avec $e_k = (-1)^k/k!$ et $f_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On obtient finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right)\cdot$$

104. RMS 2016 939 ENSEA PSI, RMS 2016 941 CCP PSI

Soit (a_n) dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_1 \geqslant a_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 2$, $a_n = a_{n-1} + \frac{2}{n}a_{n-2}$.

(a) Montrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite $(\frac{a_n}{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$

(b) Former une équation différentielle vérifiée par la somme et calculer cette somme dans le cas où $a_0 = a_1 = 1$.

Solution. —

(a) Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ donc $\forall n \geqslant 2$, $a_n - a_{n-1} = \frac{2}{n}a_{n-2} \geqslant 0$ et (a_n) est croissante.
Montrons que $(\frac{a_n}{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante :

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{n^2} - \frac{a_{n-1}}{(n-1)^2} &= \frac{a_{n-1}}{n^2} + \frac{2a_{n-2}}{n^3} - \frac{a_{n-1}}{(n-1)^2} = \frac{2}{n^3}a_{n-2} - \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}a_{n-1} \overset{(a_{n-2}\leqslant a_{n-1})}{\leqslant} \left[\frac{2}{n^3} - \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}\right]a_{n-1} \\ &= \frac{-3n+2}{n^3(n-1)^2}a_{n-1} \leqslant 0.\end{aligned}$$

La suite $(\frac{a_n}{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante et minorée par 0, elle est bornée. On déduit de ce qui précède que $a_n = \mathrm{O}(n^2)$ donc $R \geqslant 1$ et comme $a_n \geqslant a_0 > 0$, $R \leqslant 1$ c'est-à-dire

$$R = 1.$$

(b) On a :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (x-1)f'(x) + (2x+1)f(x) = 0$$

. Grâce à la C.I. $f(0) = a_0 = 1$, on a donc

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = -\frac{e^{-2x}}{(x-1)^3}.$$

105. RMS 2016 593 Mines Ponts PC, RMS 2013 607 Mines Ponts PSI, RMS 2014 770 Mines Ponts PC

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Soient $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ et $g\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)x^n$.

(a) Montrer que la suite $(H_n - \ln n)$ est convergente.

(b) Montrer que les fonctions f et g sont définies sur $]-1,+1[$.

(c) Montrer que, pour tout $x \in]-1,+1[$, $f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

(d) Montrer que $f(x) \sim g(x)$ $(x \to 1^-)$.

Solution. —

(a) Du théorème des accroissements finis, on tire l'encadrement $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$. On en déduit que la suite $(H_n - \ln n)$ est décroissante car $[H_{n+1} - \ln(n+1)] - [H_n - \ln n] = \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \leq 0$). Or elle est aussi positive car, en sommant l'inégalité $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ de $k = 1$ à n, on obtient : $\ln(n+1) \leq H_n$. Donc elle converge.

(b) Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum(\ln n)x^n$. On vérifie que $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$ tend vers 1. Donc, par la critère de d'Alembert, $R = 1$.
$H_n - \ln n$ tend vers un réel γ, d'où $\frac{H_n}{\ln n} - 1$ tend vers 0, donc $H_n \sim \ln n$. On en déduit que la série entière $\sum H_n x^n$ a le même rayon de convergence $R = 1$ que $\sum(\ln n)x^n$.

(c) Si on pose $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_0 = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ alors les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont toutes deux de rayon de convergence 1 et de sommes respectives sur $]-1,1[$ égales à $\frac{1}{1-x}$ et $-\ln(1-x)$. Par produit de Cauchy, il vient

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x} \times (-\ln(1-x)) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

où $c_0 = a_0 b_0 = 0$ et si $n \geqslant 1$ $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$ d'où

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

(d) Comme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$ est bornée par un certain M. Par suite,

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n \right| \leqslant M \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{Mx}{1-x} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad \text{quand } x \to 1^-.$$

D'où $f(x) - g(x) = o(f(x))$ $(x \to 1^-)$. Donc $f(x) \sim g(x)$ $(x \to 1^-)$.

106. RMS 2013 670 Mines Ponts PC, RMS 2006 1132 CCP PC, RMS 2011 1144 CCP PC, RMS 2013 1019 CCP PSI

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 (\frac{1+t^2}{2})^n \, \mathrm{d}t$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq \frac{1}{n+1}$ et étudier la limite de la suite (a_n).

Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$?

Solution. — On pose $u_n : t \in [0,1] \mapsto (\frac{1+t^2}{2})^n$.

On constate que $\forall t \in [0,1]$, $t \leqslant \frac{1+t^2}{2}$, donc $t^n \leqslant u_n(t)$. En intégrant, on trouve $\frac{1}{n+1} \leqslant a_n$, donc $\sum a_n$ diverge par comparaison de termes positifs.

Pour tout $t \in [0,1[$, la suite numérique $(u_n(t))_{n \geqslant 0}$ converge vers zéro, puisqu'il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1+t^2}{2} \in [\frac{1}{2}, 1[$. De plus, la suite de terme général $u_n(1)$ est constante et vaut 1. La suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $[0,1]$ vers la fonction qui vaut 1 en 1 et 0 ailleurs, qui est continue par morceaux. Par ailleurs, l'hypothèse de domination suivante est vérifiée : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,1]$, $|u_n(t)| \leqslant \varphi(t) := 1$, la fonction φ étant intégrable sur $[0,1]$. Le théorème de convergence dominée s'applique, et

$$\lim_{+\infty} a_n = \int_0^1 0 \, \mathrm{d}t = 0.$$

Comme la raison $r = \frac{1+t^2}{2}$ appartient à $[0,1]$, la suite de terme général $u_n(t) = r^n$ est décroissante. Par conséquent, la suite des intégrales a_n est décroissante. Alors la série $\sum (-1)^n a_n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, donc converge.

La série $\sum a_n x^n$ converge en -1, diverge en $+1$ et c'est une série entière, donc son rayon de convergence vaut 1. L'ensemble de définition de la fonction f est donc $[-1,+1[$.

2.5 Équations différentielles & calcul différentiel

107. RMS 2014 1308 CCP PSI

Soit (S) $\begin{cases} x'(t) = y(t) - z(t) \\ y'(t) = z(t) - x(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t), \end{cases}$ avec $x(0) = 1$, $y(0) = z(0) = 0$.

(a) Montrer que la trajectoire de toute solution est incluse dans une sphère et dans un plan.

(b) Résoudre directement (S).

Solution. —

(a) $x' + y' + z' = 0$, donc, $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) + y(t) + z(t) = cte = x(0) + y(0) + z(0) = 1$. Donc la trajectoire est incluse dans le plan d'équation $x + y + z = 1$.

De la même manière, $xx' + yy' + zz' = 0$. D'où $x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = cte = x(0)^2 + y(0)^2 + z(0)^2 = 1$. Donc la trajectoire est incluse dans la sphère de rayon 1.

(b) Le spectre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est : $\mathrm{Sp}(A) = \{0, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\}$; un vecteur propre associé à 0 est $(1,1,1)$ et un vecteur propre associé à $\pm i\sqrt{3}$ est $(\pm i\sqrt{3}-1, -1-(\pm i\sqrt{3}), 2)$.
(x,y,z) est donc une solution si, et seulement si, il existe des constantes (a,b,c) telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\exp(i\sqrt{3}\,t) \begin{pmatrix} i\sqrt{3}-1 \\ -i\sqrt{3}-1 \\ 2 \end{pmatrix} + c\exp(-i\sqrt{3}\,t) \begin{pmatrix} -i\sqrt{3}-1 \\ i\sqrt{3}-1 \\ 2 \end{pmatrix}.$
La C.I. est vérifiée si, et seulement si : $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$ et $c = -\frac{1}{3}$.

108. RMS 2010 1026 CCP PSI

Mots-clés : raccordement de solutions

Soit $(E) : (1+x)y' - 2y = 0$.

(a) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E). Donner une base de l'ensemble des solutions.

(b) Donner une base de l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

Solution. — Le coefficient $1+x$ s'annule en -1. On commence donc par résoudre (E) sur les intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$ et $I_2 =]-1, +\infty[$. On trouve que les solutions sont les fonctions d'expression

$$y(x) = \begin{cases} k_1(x+1)^2 & \text{si } x \in I_1 \\ k_2(x+1)^2 & \text{si } x \in I_2, \end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles.

(a) Analyse — Si la fonction y est une solution sur $\mathbb{R}$, alors elle est continue en -1. Or la limite en -1^- vaut 0, donc $y(-1) = 0$.
Synthèse — Les fonctions définies par

$$y(x) = \begin{cases} k_1(x+1)^2 & \text{si } x \in I_1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ k_2(x+1)^2 & \text{si } x \in I_2, \end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles sont continues.
De plus,

$$y'(x) = \begin{cases} 2k_1(x+1) & \text{si } x \in I_1 \\ 2k_2(x+1) & \text{si } x \in I_2, \end{cases}$$

D'aprés le théorème de la limite de la dérivée, elles sont dérivables en -1 et $y'(-1) = 0$ car $\lim_{-1} y' = 0$. (En effet, $\lim_{-1^+} y' = 0$ et $\lim_{-1^-} y' = 0$.) Enfin $(1+x)y'(x) - 2y(x)$ est bien égal à 0 si $x = -1$.
Donc y est une solution sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, il existe des constantes k_1 et k_2 telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = \begin{cases} k_1(x+1)^2 & \text{si } x \in I_1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ k_2(x+1)^2 & \text{si } x \in I_2, \end{cases}$$

Une base de l'ensemble des solutions est formée par les deux solutions y_1 et y_2 définies par : :

$$y_1(x) = (x+1)^2 \text{ si } x \in I_1 \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

et

$$y_2(x) = (x+1)^2 \text{ si } x \in I_2 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

(b) Comme

$$y''(x) = \begin{cases} 2k_1 & \text{si } x \in I_1 \\ 2k_2 & \text{si } x \in I_2, \end{cases}$$

y est $\mathcal{C}^2$ si et seulement si $k_1 = k_2$. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto (x+1)^2$ forme alors une base de l'ensemble des solutions.

109. RMS 2013 921 Centrale PC

Déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)+f(-x)=e^x$.

Solution. — Analyse — Si f est une solution, alors f est deux fois dérivable puisque f' est la somme de deux fonctions dérivables : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=e^x-f(-x)$. De plus, $f''(x)=e^x+f'(-x)=e^x+e^{-x}-f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, donc f est solution de l'équation différentielle $y''+y=e^x+e^{-x}$. Il existe donc $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=A\cos x+B\sin x+\operatorname{ch} x$.
Synthèse — Si f possède la forme ci-dessus, alors $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)+f(-x)=-A\sin x+B\cos x+\operatorname{ch} x+A\cos x-B\sin x+\operatorname{ch} x=(A+B)(\cos x-\sin x)+e^x$. La fonction f vérifie l'identité souhaitée si et seulement si $\forall x\in\mathbb{R}, (A+B)(\cos x+\sin x)=0$, donc si, et seulement si, $A+B=0$ puisque la fonction $\cos-\sin$ n'est pas identiquement nulle. Finalement, les solutions sont les fonctions f telles que

$$\exists A\in\mathbb{R},\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=A(\cos x-\sin x)+\operatorname{ch} x.$$

110. RMS 2016 525 Mines Ponts PSI

L'application $H\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $H(x,y)=\frac{x^4y}{x^4+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, et $H(0,0)=0$, est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$?

Solution. — La fonction H est continue en dehors de $(0,0)$.

Et aussi en $(0,0)$ car $0\leq|H(x,y)-H(0,0)|\leq|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$.

La fonction H possède des dérivées partielles en dehors de $(0,0)$. Et en $(0,0)$ aussi car : $\frac{H(0+h,0)-H(0,0)}{h}=0\to0\ (h\to0)$, d'où $\partial_1 H(0,0)$ existe et vaut 0. De même, $\partial_2 H(0,0)$ existe et vaut 0.

Si $(x,y)\neq(0,0)$, alors $\partial_2 H(x,y)=x^4\frac{x^4-y^2}{(x^4+y^2)^2}$. On obtient $\partial_2 H(x,2x^2)=-\frac{3}{25}$, qui ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0, donc $\partial_2 H$ n'est pas continue en $(0,0)$ et H n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

111. RMS 2009 998 Centrale PSI

Trouver les extrema de $(x,y)\mapsto\sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$ sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant\pi,\ 0\leqslant x+y\leqslant\pi\}$.

Solution. — On note f la fonction étudiée, et T l'ensemble sur lequel on cherche les extrema : c'est le triangle fermé OAB avec $A=(\pi,0)$ et $B=(0,\pi)$.

Comme f est continue et T est fermé borné, f est bornée et atteint ses bornes sur T. Comme le sinus est une fonction positive sur $[0,\pi]$, on a $f\geqslant0$ sur T. De plus $f(x,y)=0$ sur T si, et seulement si, $x=0$ ou $y=0$ ou $x+y=\pi$, autrement dit sur les trois côtés de T. On vient donc de déterminer le minimum global de f sur T et les points en lesquels il est atteint.

Le maximum global de f, qui n'est pas constante sur T, sera nécessairement à l'intérieur de T, donc sur un ouvert. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, ce maximum global sera atteint en un point critique : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\sin(y)[\cos(x)\sin(x+y)+\sin(x)\cos(x+y)]=\sin(y)\sin(2x+y)$ et, parce que f est symétrique, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sin(x)\sin(2y+x)$. D'où un point (x,y) intérieur à T est critique si, et seulement si, $2x+y=\pi$ et $x+2y=\pi$. On obtient un unique point critique $M_0=\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ qui est bien à l'intérieur de T. En ce point critique, f atteint nécessairement son maximum global, qui vaut $\frac{3\sqrt{3}}{8}$, et il n'y a pas d'autre extremum local.

Remarque. — Indépendamment du raisonnement ci-dessus, on peut déterminer la nature du point critique M_0 en étudiant la hessienne : $H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2\sin(y)\cos(2x+y) & \cos(2x+2y)\\ \cos(2x+2y) & 2\sin(x)\cos(2y+x)\end{pmatrix}$ est égale en M_0 à $H_f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -\frac12\\ -\frac12 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$. Son déterminant $\det H_f(M_0)=3-\frac14$ est strictement positif, donc f possède un extremum local en M_0 et sa trace $\operatorname{tr} H_f(M_0)=-2\sqrt{3}$ est négative, donc cet extremum local est un maximum local.

112. RMS 2016 612 Mines Ponts PC

Déterminer les solutions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ de l'équation $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{x}$.

Solution. — Passons en coordonnées polaires en posant $V=]0,+\infty[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $M:V\to U,\ (r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)$. Cette application est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Si f est $\mathcal{C}^1$ sur U, alors $F=f\circ M:V\to\mathbb{R},\ (r,\theta)\mapsto F(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ est $\mathcal{C}^1$ sur V et, d'après la règle de la chaîne :

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\\ \frac{\partial F}{\partial\theta}(r,\theta)=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
&x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{x},\\
&\iff r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)=\tan\theta\\
&\iff \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)=\frac{\tan\theta}{r}\\
&\iff \exists G\in C^1(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[),\quad F(r,\theta)=\tan\theta\ln r+G(\theta)\\
&\iff \exists G\in C^1(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[),\quad f(x,y)=\frac{y}{x}\ln\sqrt{x^2+y^2}+G\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right).
\end{aligned}$$

Donc f est une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur U *ssi* $\exists g\in C^1(\mathbb{R}),\quad \forall(x,y)\in U,\quad f(x,y)=\frac{y}{2x}\ln(x^2+y^2)+g\left(\frac{y}{x}\right)$.

113. RMS 2013 396 X ESPCI PC

Mots-clés : accroissements finis

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ différentiable dont toutes les dérivées partielles sont bornées entre -1 et 1. Montrer que $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant\sqrt{n}\,\|x-y\|$.

Solution. — On se ramène à une variable grâce à la fonction $M:t\in[0,1]\mapsto tx+(1-t)y$ qui vérifie $M(0)=y$ et $M(1)=x$ et est dérivable : $\forall t\in[0,1],\ M'(t)=x-y$. La fonction d'une variable $\varphi=f\circ M$ vérifie $\varphi(0)=f(y)$ et $\varphi(1)=f(x)$ et est dérivable d'après la règle de la chaîne :

$$\forall t\in[0,1],\quad \varphi'(t)=\langle\nabla f(M(t)),M'(t)\rangle=\langle\nabla f(M(t)),x-y\rangle.$$

Pour tout $z\in\mathbb{R}^n$, $\|\nabla f(z)\|^2=\sum_{i=1}^n(\frac{\partial f}{\partial x_i}(z))^2\leqslant\sum_{i=1}^n 1=n$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre alors que

$$\forall t\in[0,1],\quad |\varphi'(t)|\leqslant\sqrt{n}\|x-y\|.$$

Par l'inégalité des accroissements finis (valable car φ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$), on en déduit que

$$|f(x)-f(y)|=|\varphi(1)-\varphi(0)|\leqslant\sqrt{n}\|x-y\|(1-0).$$

114. RMS 2012 357 X ESPCI PC

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ différentiable telle que $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2,\ \|f(x)-f(y)\|\geqslant\|x-y\|$. Montrer que f est injective. Et que, pour tout $x_0\in\mathbb{R}^n$, $df(x_0)$ est bijective.

Solution. — Si $x\neq y$, alors $\|f(x)-f(y)\|\geqslant\|x-y\|\neq0$, donc $f(x)\neq f(y)$: la fonction f est injective. On fixe x_0 et h dans $\mathbb{R}^n$, et on désigne par t une variable réelle. Alors, parce que f est différentiable en x_0, $f(x_0+th)=f(x_0)+\mathrm{d}f(x_0)\cdot(th)+\mathrm{o}(th)=f(x_0)+t\,\mathrm{d}f(x_0)\cdot h+\mathrm{o}(t)$. D'où $\|f(x_0+th)-f(x_0)\|=\|t\,\mathrm{d}f(x_0)\cdot h+\mathrm{o}(t)\|\geqslant\|th\|$, d'où $\|\,\mathrm{d}f(x_0)\cdot h+\mathrm{o}(1)\|\geqslant\|h\|$, le $\mathrm{o}(1)$ étant relatif à la variable réelle t en zéro. En faisant tendre t vers zéro, on obtient

$$\forall(x_0,h)\in(\mathbb{R}^n)^2,\quad \|\,\mathrm{d}f(x_0)\cdot h\|\geqslant\|h\|.$$

Ceci prouve que la différentielle $\mathrm{d}f(x_0)$ de f en x_0 est injective, donc bijective, pour tout $x_0\in\mathbb{R}^n$.

115. RMS 2009 1062 Centrale PC

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ différentiable. On suppose que $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^2)^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant\|x-y\|^2$. Montrer que f est constante.

Solution. — On fixe $a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$. Comme f est différentiable en a, $f(a+h)=f(a)+\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2+\mathrm{o}(h)$, et si on applique l'inégalité $|f(x)-f(y)|\leqslant\|x-y\|^2$ avec $x=a+(0,h_1)$ et $y=a$, on obtient

$$\forall h_1\in\mathbb{R},\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+\mathrm{o}(h_1)\right|\leqslant h_1^2.$$

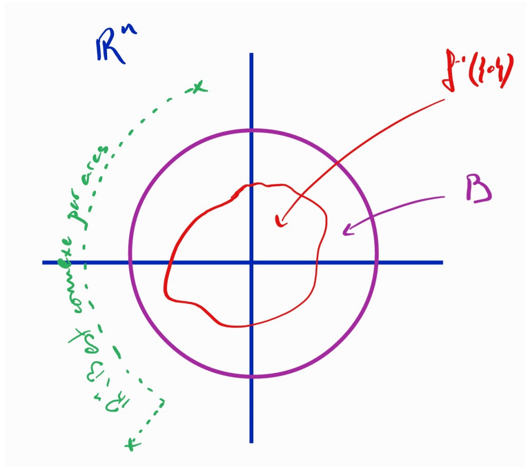
En divisant par $h_1\neq0$, puis en faisant tendre h_1 vers 0, l'inégalité large passe à la limite et on obtient $|\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)|\leqslant0$, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)=0$.

Il s'ensuit que f est constante sur toute droite du plan parallèle à Ox. On montre de même qu'elle est constante sur toute droite parallèle à Oy et, finalement, qu'elle est constante sur $\mathbb{R}^2$.

116. RMS 2024 678 Mines Ponts MP MPI

Mots-clés : compacité et connexité par arcs

Soient un entier $n\geq2$ et une fonction f continue de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f^{-1}(\{0\})$ est un compact non vide. Montrer que f admet un extremum global. Que dire si $n=1$?



Solution. — L'ensemble $f^{-1}(\{0\})$ est compact, donc fermé borné, il est donc inclus dans une boule fermée B centrée en 0.
L'application $f|_B$ posséde un minimum global m et un maximum global M car elle est continue sur le compact B. De plus, f s'annule sur B, donc $m \leq 0$ et $M \geq 0$.

L'ensemble $A = \mathbb{R}^n \setminus B$ est connexe par arcs, la fonction f y est continue et ne s'y annule pas. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle n'y change donc pas de signe. Si $f|_A > 0$, alors m est le minimum global de f. Si $f|_A < 0$, alors M est le maximum global de f.
Si $n = 1$, la propriété est fausse car la fonction identité $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ fournit un contre-exemple.

117. RMS 2024 876 Mines Ponts MP MPI

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable telle que $\|f(x)\| \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est surjective. Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|f(x) - a\|^2$.

(a) Montrer que la fonction g est différentiable et exprimer $dg(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Montrer que la fonction g admet un munimum global.

(c) En déduire que la fonction f est surjective.

Solution. —

(a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$: pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $g(x+h) = \|f(x+h) - a\|^2 = \|f(x) + df(x)\cdot h + o(h) - a\|^2 = \|f(x) - a\|^2 + 2\langle f(x) - a|df(x)\cdot h\rangle + o(h)$, d'où g est différentiable en x et $dg(x)$ est l'application linéaire $h \mapsto 2\langle f(x) - a|df(x)\cdot h\rangle$.

(b) D'une part, $g(x) = \|f(x) - a\|^2 \geq (\|f(x)\| - \|a\|)^2$ d'après l'inégalité triangulaire inversée. Or $\|f(x)\|$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$ par hypothèse. D'où $g(x)$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Il existe donc $R > 0$, tel que $\|x\| > R \implies g(x) \geq g(0)$.
D'autre part, la fonction g est continue car différentiable. Et la boule fermée B de centre 0 et de rayon R est compacte. La fonction $g|_B$ est continue sur le compact B, elle possède donc un minimum global m. Et $m \leq g(0)$ car $0 \in B$. Donc m est le minimum global de g sur $\mathbb{R}^n$.

(c) Soit $a \in \mathbb{R}^n$: la fonction g est différentiable et elle possède un minimum global en un point x de l'ouvert $\mathbb{R}^n$, d'où $dg(x) = 0$. D'où $\langle f(x) - a|df(x)\cdot h\rangle = 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. Or l'application $h \mapsto df(x)\cdot h$ est surjective par hypothèse, d'où $\langle f(x) - a|k\rangle$ pour tout $k \in \mathbb{R}^n$. D'où $f(x) - a = 0$. Donc f est surjective.

3 Probabilités

118. RMS 2017 482 X ESPCI PC & RMS 2018 518 X ESPCI PC

On place aléatoirement $n \geqslant 3$ boules dans n urnes. Calculer la probabilité qu'une seule urne soit vide.

Solution. — L'univers est l'ensemble Ω des applications de $[\![1,n]\!]$ (l'ensemble des boules) dans $[\![1,n]\!]$ (l'ensemble des urnes) et il y a équiprobabilité. On a

$$\operatorname{Card}\Omega = n^n.$$

Construire un résultat favorable à l'événement V qui nous intéresse , c'est :

- choisir une urne qui sera vide, il y a n manières ;
- choisir une urne qui contiendra deux boules, il y a $n-1$ manières ;
- choisir les deux boules que contiendra cette urne, il y a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ choix ;
- placer une des $n-2$ boules restantes dans chacuen des $n-2$ urnes restantes, il y a $(n-2)!$ manières.

Le nombre de résultats favorables est donc $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! \cdot \binom{n}{2} = n!\binom{n}{2}$. La probabilité cherchée vaut donc

$$P(V) = \frac{\operatorname{Card} V}{\operatorname{Card}\Omega} = \binom{n}{2}\frac{n!}{n^n}.$$

119. RMS 2019 895 Mines Ponts PC

On lance indéfiniment un dé équilibré.

(a) Soit A_n l'événement «aucun 6 n'a été obtenu lors des n premiers lancers ». Déterminer $P(A_n)$.

(b) Soit F_k l'événement «le premier 6 est obtenu au k-ième lancer ». Déterminer $P(F_k)$.

(c) Soit K l'événement «6 n'apparaît jamais ». Exprimer K à l'aide des A_n. En déduire $P(K)$.

(d) Exprimer K en fonction des F_k. Retrouver la valeur de $P(K)$.

(e) Soient G l'événement «6 apparaît une infinité de fois » et H l'événement «6 apparaît à tous les lancers sauf un nombre fini d'entre eux ». Calculer $P(G)$ et $P(H)$.

Solution. — On note B_i l'événement « Au $i$ème lancer on a un 6 ».

(a) Les lancers sont indépendants : $P(A_n) = P(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_n}) = P(\overline{B_1}) \dots P(\overline{B_n}) = (\frac{5}{6})^n$.

(b) On obtient, en invoquant l'indépendance des lancers ou la loi géométrique :

$$P(F_k) = P(A_{k-1} \cap B_k) = P(A_{k-1})P(B_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}.$$

(c) On trouve $K = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$, et les (A_n) formant une suite décroissante. Par le théorème de continuité décroissante

$$P(K) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0.$$

(d) On a aussi $K = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{F_k} = \overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k}$. La réunion étant disjointe, $P(\cup_{k=1}^{+\infty} F_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(F_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{5}{6})^{k-1}\frac{1}{6} = 1$. On retrouve la valeur

$$P(K) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k\right) = 0.$$

(e) i. Soit G l'événement «6 apparaît une infinité de fois». Son contraire est : «6 apparaît un nombre fini de fois », ou encore «à partir d'un certain rang, on n'a plus de 6», soit :

$$\overline{G} = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{B_k}.$$

Si on note $C_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{B_k}$, les (C_n) forment une famille croissante. Par théorème de continuité croissante on a donc $P(\overline{G}) = P(\cup_{n=1}^{+\infty} C_n) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n)$. Mais pour tout N, $P(C_n) \leqslant P(\cap_{k=n}^{n} \overline{B_k}) = \prod_{k=n}^{n} P(\overline{B_k})$ par indépendance des lancers, donc $P(C_n) \leqslant (\frac{5}{6})^{N-n+1}$, donc $P(C_n) = 0$. Alors $P(\overline{G}) = 0$ donc $P(G) = 1$.

ii. Soit H l'événement «6 apparaît à tous les lancers sauf un nombre fini d'entre eux», ou encore «à partir d'un certain rang, on n'a plus que des 6», soit

$$H = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} B_k.$$

Si on pose $D_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} B_k$, les (D_n) forment une famille croissante. Par théorème de continuité croissante, on a donc $P(H) = P(\cup_{n=1}^{+\infty} D_n) = \lim_{n\to+\infty} P(D_n)$. Mais pour tout N, $P(D_n) \leqslant P(\cap_{k=n}^{n} B_k) = \prod_{k=n}^{n} P(B_k)$ par indépendance des lancers, donc $P(D_n) \leqslant (\frac{1}{6})^{N-n+1}$, donc $P(D_n) = 0$. Finalement,

$$P(H) = 0.$$

120. RMS 2017 900 Mines Ponts PC, RMS 2016 615 Mines Ponts PC

On lance deux dés équilibrés. Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires correspondant aux résultats des lancers des dés 1 et 2. On pose $X = \min\{U_1, U_2\}$ et $Y = \max\{U_1, U_2\}$.

(a) Déterminer $P(X \geq k)$ et $P(Y \geq k)$ pour chaque $k \in [\![1, 6]\!]$.

(b) Calculer XY en fonction de U_1 et U_2 et en déduire que $E(XY) = (\frac{7}{2})^2$.

Solution. — ▷ **Stratégie du max :** $(Y \leq k) = (U_1 \leq k) \cap (U_2 \leq k)$. Voir aussi l'exercice 131.

(a) La variable X est à valeurs dans $[\![1, 6]\!]$ et, pour $k \in [\![1, 6]\!]$, on a $(X \geqslant k) = (U_1 \geqslant k) \cap (U_2 \geqslant k)$. Par indépendance et équiprobabilité, on en déduit que $P(X \geqslant k) = [P(U_1 \geqslant k)]^2 = (\frac{6-k+1}{6})^2 = (\frac{7-k}{6})^2$.
De $(Y \geqslant k) = (U_1 \geqslant k) \cup (U_2 \geqslant k)$, on déduit que $P(Y \geqslant k) = P[(U_1 \geqslant k) \cup (U_2 \geqslant k)] = P(U_1 \geqslant k) + P(U_2 \geqslant k) - P[(U_1 \geqslant k) \cap (U_2 \geqslant k)] = P(U_1 \geqslant k) + P(U_2 \geqslant k) - P(X \geq k)$.

(b) On a $XY = U_1 U_2$ et, par indépendance, $E(U_1 U_2) = [E(U_1)]^2 = (\frac{7}{2})^2$.

121. RMS 2017 1353 CCP PSI

Deux joueurs jouent avec des pièces équilibrées. Ils lancent chacun n fois une pièce. Celui qui gagne est celui qui obtient le plus grand nombre de fois pile. Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant ? On pourra utiliser (et éventuellement démontrer) l'égalité $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Solution. — ▷ **Stratégie du contraire**. On note G l'événement «Il y a un gagnant» et E l'événement «Il y a égalité». Notons X (resp Y) la variable aléatoire donnant le nombre de pile du premier (resp deuxième) joueur. Ces variables aléatoires suivent une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. Par réunion disjointe et par l'indépendance (implicite) de X et Y :

$$P(G) = 1 - P(E) = 1 - P\left(\bigcup_{i=0}^{n} (X = i) \cap (Y = i)\right) = 1 - \sum_{i=0}^{n} P((X = i) \cap (Y = i)) = 1 - \sum_{i=0}^{n} P(X = i)P(Y = i).$$

On en déduit que

$$P(G) = 1 - \sum_{i=0}^{n} \left[\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = 1 - \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}.$$

Remarque : L'identité $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$ se démontre par exemple en écrivant que le coefficient de x^n dans le produit $(1+x)^n \times (1+x)^n$ est le même que dans $(1+x)^{2n}$.

122. RMS 2021 132 1190 CCP PSI 2021, RMS 2018 129 207 CCP PSI 2018

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, de même loi et admettant une variance. On suppose que la variable aléatoire $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

(a) Déterminer l'espérance et la variance de X.

(b) Calculer la fonction génératrice de X sur $]0, 1[$.

(c) En déduire la loi de X.

Solution. — Notons $q = 1 - p$.

(a) $E(Z) = E(X) + E(Y) + 1 = 2E(X) + 1$ car l'espérance est linéaire et les *v.a.* X et Y suivent la même loi. De plus, $E(Z) = \frac{1}{p}$ car Z suit la loi $\mathcal{G}(p)$. Donc $E(X) = \frac{q}{2p}$.
$V(Z) = V(X + Y + 1) = V(X + Y)$. De plus $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ car X et Y sont indépendantes. D'où $V(Z) = 2V(X)$ car X et Y suivent la même loi. Enfin, $V(Z) = \frac{q}{p^2}$ car Z suit la loi $\mathcal{G}(p)$. Donc $V(X) = \frac{q}{2p^2}$.

(b) Pour tout $t \in \left]\frac{-1}{q}, \frac{+1}{q}\right[$, $G_Z(t) = \frac{pt}{1-qt}$ car Z suit la loi $\mathcal{G}(p)$. Or $G_Z(t) = tG_{X+Y}(t)$ et, pour tout $t \in]-1, +1[$, $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$ car X et Y sont indépendantes. D'où $G_Z(t) = t\,[G_X(t)]^2$, pour tout $t \in]-1, +1[$. Par suite, $G_X(t) = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{1-qt}}$ pour tout $t \in]0, 1[$.

(c) Pour tout $x \in]-1, +1[$, $(1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, où $a_n = \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n n!^2}$. D'où, pour tout $t \in]0, 1[$, $G_X(t) = \sqrt{p}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-qt)^n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n t^n$, où $p_n = \sqrt{p}\frac{(2n)!}{4^n n!^2}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = p_n = \sqrt{p}\frac{q^n(2n)!}{4^n n!^2}$.

123. RMS 2016 964 CCP PSI

On considère une urne contenant $n-1$ boules noires et une boule blanche.

(a) On effectue une succession de tirages avec remise dans cette urne et on note T la variable aléatoire donnant le rang du premier tirage amenant la boule blanche. Donner les valeurs prises par T, sa loi, son espérance et sa variance.

(b) On effectue maintenant des tirages sans remise.

i. Soit X la variable aléatoire donnant le rang du premier tirage amenant la boule blanche. Donner les valeurs prises par X, sa loi, son espérance et sa variance.

ii. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires restantes dans l'urne après le tirage de la boule blanche. Exprimer Y en fonction de X et n. Donner l'espérance de Y ainsi que sa variance.

Solution. —

(a) La variable aléatoire T mesure le temps d'attente du 1^{er} succès lors d'une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes (car « avec remise ») de paramètre $p=\frac{1}{n}$. Donc

$$T\sim\mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right),\quad E(T)=\frac{1}{p}=n\quad\text{et}\quad V(T)=\frac{1-p}{p^2}=n(n-1).$$

(b) i. À l'issue du k-ième tirage infructueux, l'urne contient $(n-k-1)$ boules noires et la blanche, à l'issue du $(n-1)$-ième tirage infructueux, l'urne ne contient plus que la boule blanche et donc le n-ième tirage est nécessairement un succès, donc $X(\Omega)=\{1,\dots,n\}$.
Pour $1\leqslant k\leqslant n$, $(X=k)=(\cap_{i=1}^{k-1}\overline{B}_i)\cap B_k$ donc, avec la formule des probabilités composées,

$$P(X=k)=P(\overline{B}_1).P(\overline{B}_2\mid\overline{B}_1)\dots P(\overline{B}_{k-1}\mid\overline{B}_1\cap\cdots\cap\overline{B}_{k-2}).P(B_k\mid\overline{B}_1\cap\cdots\cap\overline{B}_{k-1}).$$

Or il est sous-entendu que la probabilité du k-ième tirage est uniforme, c'est-à-dire $P(\overline{B}_i\mid\overline{B}_1\cap\cdots\cap\overline{B}_{i-1})=\frac{n-i}{n-i+1}$ (1 boule blanche parmi $n-i+1$), donc $P(X=k)=\prod_{i=1}^{k-1}\frac{n-i}{n-i+1}\cdot\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n}$:

$$X\sim\mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket),\quad E(X)=\frac{n+1}{2}\quad\text{et}\quad V(X)=\frac{n^2-1}{12}\cdot$$

ii. Si la boule blanche est tirée au k-ième tirage, $X=k$, on a retiré $(k-1)$ boules noires de l'urne, il en reste donc $Y=(n-1)-(k-1)=n-X$ dans l'urne après ce k-ième tirage, donc $E(Y)=n-E(X)=\frac{n+1}{2}$ et $V(Y)=V(X)=\frac{n^2-1}{12}$.

124. RMS 2016 614 Mines Ponts PC

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. Calculer $E(\frac{1}{X})$.

Solution. — Le théorème de transfert donne, grâce à $p\in]0,1[$:

$$E\left(\frac{1}{X}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}p(1-p)^{k-1}=\frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}(1-p)^k=-\frac{p}{1-p}\ln(1-(1-p))=-\frac{p\ln p}{1-p}\cdot$$

125. RMS 2017 1358 CCP PSI

Soit $n\geq 2$. On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note X_n le rang du premier tirage où l'on obtient une boule différente de la première boule tirée.

(a) Établir la loi de la variable aléatoire X_n.

(b) Justifier l'existence de l'espérance de X_n et la calculer.

Solution. — On suppose $n\geqslant 2$.

(a) Appelons, à partir du second tirage, «succès» le fait de tirer une boule différente de la première. La probabilité de succès est $\frac{n-1}{n}$, et $T_n=X_n-1$ mesure le temps d'attente du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes (car « avec remise »). Donc T_n est une variable aléatoire discrète de loi géométrique $\mathcal{G}(\frac{n-1}{n})$.
On en déduit que $X_n=T_n+1$ est une variable aléatoire discrète de loi donnée par $X_n(\Omega)=\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$,

$$P(X_n=k)=P(T_n=k-1)=\frac{n-1}{n}\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^{k-2}=\frac{n-1}{n^{k-1}}\cdot$$

(b) On sait que la variable T_n admet pour espérance et $E(T_n) = \frac{n}{n-1}$ (loi géométrique) donc, par linéarité, X_n admet une espérance, et

$$E(X_n) = 1 + \frac{n}{n-1} = \frac{2n-1}{n-1}.$$

126. RMS 2016 967 ENSEA PSI

Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $E(|X-\lambda|) = 2e^{-\lambda}\frac{\lambda^{N+1}}{N!}$, avec $N = \lfloor \lambda \rfloor$.

127. RMS 2017 1357 CCP PSI

Dans un casino, une machine renvoie un entier naturel N non nul selon la loi de probabilité : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(N=n) = \frac{1}{2^n}$. Le joueur gagne N jetons si N est pair ; il perd N jetons si N est impair.

(a) Quelle est la probabilité de gagner ?

(b) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G égale au gain algébrique du joueur.

Solution. —

(a) L'événement (N est pair) est l'union disjointe $\cup_{i \in \mathbb{N}^*}(N = i)$. La probabilité de gagner est donc

$$P(N \text{ est pair}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(N = 2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}.$$

(b) Soius réserve que la *v.a.* G possède une espérance, *i.e.* sous réserve que la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$ converge absolument, l'espérance de G vaudra $E(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$. Or pour tout $x \in]-1;1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$. Or on peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence, d'où $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n x^{n-1} = \frac{-1}{(1+x)^2}$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n x^n = \frac{-x}{(1+x)^2}$. Ainsi,

$$E(G) = \frac{-1/2}{(1+1/2)^2} = -\frac{2}{9}.$$

128. RMS 2017 901 Mines Ponts PC

On lance une pièce qui a une probabilité p de donner pile. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux fois pile. Déterminer la loi de X et la fonction génératrice G_X de X. Calculer $E(X)$.

Solution. —

$$(X = n) = \bigcup_{k=1}^{n-1} \left[(X_1 = 0) \cap \cdots \cap (X_k = 0) \cap (X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 0) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 1)\right],$$

où $(X_i = 1)$ pour pile au i-ième coup (succès) et $(X_i = 0)$ pour face au i-ième coup (échec). L'union est disjointe et les événements intersectés sont indépendants :

$$P(X = n) = (n-1)p^2 q^{n-2}.$$

On en déduit la fonction génératrice de X : pour tout $t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[$,

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n)t^n = (pt)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(qt)^{n-1} = \frac{(pt)^2}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(qt)^n\right) = \frac{(pt)^2}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(qt)^n\right) = \frac{(pt)}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{1-qt}\right) \\ &= \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^2. \end{aligned}$$

Comme G_X est la somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{q} > 1$, elle est dérivable en 1, donc X admet une espérance, donnée par $E(X) = G'_X(1) = 2f(1)f'(1)$, où $f(t) = \frac{pt}{1-qt}$. Donc $E(X) = \frac{2}{p}$.

129. RMS 2016 803 Centrale PSI

Trois individus jouent au ballon :
— si A possède la balle, il l'envoie à B avec probabilité $\frac{1}{3}$ et à C avec probabilité $\frac{2}{3}$,
— si B possède la balle, il l'envoie à A avec probabilité $\frac{1}{3}$ et à C avec probabilité $\frac{2}{3}$,
— si C possède la balle, il l'envoie à B avec probabilité $\frac{1}{3}$ et à A avec probabilité $\frac{2}{3}$.
On note A_n l'événement : le joueur A reçoit le ballon au n-ième lancer, et on définit de même B_n, C_n. Étudier la limite des suites $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$.

Solution. —

(a) La formule des probabilités totales donne $P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) = 0 \cdot P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n) + \frac{2}{3}P(C_n)$. De même $P(B_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + 0 \cdot P(B_n) + \frac{1}{3}P(C_n)$ et $P(C_{n+1}) = \frac{2}{3}P(A_n) + \frac{2}{3}P(B_n) + 0 \cdot P(C_n)$. On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$X_{n+1} = MX_n, \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}.$$

La matrice M a pour polynôme caractéristique $X^3 - \frac{7}{9}X - \frac{2}{9} = (X-1)(X+\frac{1}{3})(X+\frac{2}{3})$, donc M est diagonalisable. Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base formée de vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{3}, \lambda_3 = -\frac{2}{3}$. Dans cette base, X_0 s'écrit : $X_0 = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3$. Par récurrence, $X_n = M^n X_0 = x\lambda_1^n\varepsilon_1 + y\lambda_2^n\varepsilon_2 + z\lambda_3^n\varepsilon_3 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\varepsilon_1$.

Reste à déterminer le scalaire x et le vecteur ε_1 :
— en résolvant le système d'équations, $MX = 1X$, on obtient que $\varepsilon_1 = (7\ 5\ 8)^T$ en est une solution ;
— en remarquant que, pour chaque n, la somme $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n)$ des coordonnées de X_n veut 1, on conclut qu'il en de même en passant à la limite, d'où $x \cdot (7+5+8) = 1$.

Donc
$$P(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{7}{20} \quad , \quad P(B_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{5}{20} \quad \text{et} \quad P(C_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{8}{20}.$$

130. RMS 2017 1355 CCP PSI

Mots-clés : la loi du 0 - 1 de Borel

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants.

(a) Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que la probabilité qu'aucun des événements $A_n, \dots, A_{n+p}$ ne se réalise est inférieure ou égale à $\exp(-\sum_{k=n}^{n+p} P(A_k))$.

(b) On suppose que la série de terme général $P(A_n)$ est divergente. Montrer qu'il est presque impossible qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels A_n est réalisé.

(c) Montrer que, si la série de terme général $P(A_n)$ converge, alors il est presque certain qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels A_n est réalisé.

Solution. —

(a) L'événement “aucun des $A_n, \dots, A_{n+p}$ ne se réalise” est l'événement $\cap_{k=n}^{n+p}\overline{A_k}$, qui par indépendance, est de probabilité $\prod_{k=n}^{n+p} P(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{n+p}(1 - P(A_k))$.
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} \geqslant 1 - x$ (faire un dessin), donc $e^{-P(A_k)} \geqslant 1 - P(A_k)$ et, par produit de termes positifs, $\exp(-\sum_{k=n}^{n+p} P(A_k)) = \prod_{k=n}^{n+p} e^{-P(A_k)} \geqslant \prod_{k=n}^{n+p}(1 - P(A_k))$, d'où le résultat.

(b) Notons B_n^p l'événement envisagé en (a), et $B_n = \bigcap_{p=0}^{+\infty} B_n^p$ l'événement «aucun des A_k n'est réalisé pour $k \geqslant n$». La suite $(B_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, donc par continuité décroissante, $P(B_n) = \lim_{p\to+\infty} P(B_n^p)$.
Or par hypothèse, la série $\sum_{k\geqslant n} P(A_k)$ diverge. Comme elle est à termes positifs, cela implique que ses sommes partielles $\sum_{k=n}^{n+p} P(A_k)$ tendent vers $+\infty$ (quand $p \to +\infty$), donc par (a), $P(B_n) = 0$.
L'événement B : «il y a un nombre fini d'entiers k pour lesquels A_k est réalisé» est l'événement $B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$. Donc par sous-additivité, $P(B) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) = 0$, et ainsi $P(B) = 0$.

(c) À l'inverse si la série de terme général $P(A_n)$ converge, alors il est presque certain qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels A_n est réalisé : avec les notations ci-dessus, $\overline{B} \subset \overline{B_n} = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$, donc par sous-additivité, $P(\overline{B}) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$, et ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(\overline{B}) = 0$. C'est la loi du 0 - 1 de Borel.

131. RMS 2016 630 Mines Ponts PC, RMS 2017 914 Mines Ponts PC

Mots-clés : maximum de lois géométriques indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Soit $Z = \max(X, Y)$. Déterminer l'espérance de Z.

Solution. — ▷ **Stratégie du max :** $(Z \leq k = (X \leq k) \cap (Y \leq k)$. Voir aussi l'exercice 120.

- La réunion disjointe $(X \leqslant n) = \cup_{k=1}^{n}(X = k)$ donne, en notant $q = 1 - p$:

$$\mathbb{P}(X \leqslant n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1 - q^n.$$

- Comme $Z = \max(X, Y)$, on a $(Z \leqslant n) = (X \leqslant n) \cap (Y \leqslant n)$ et comme X et Y sont indépendantes :

$$\mathbb{P}(Z \leqslant n) = \mathbb{P}(X \leqslant n)\mathbb{P}(Y \leqslant n) = \mathbb{P}(X \leqslant n)^2 = (1 - q^n)^2.$$

- Enfin la variable aléatoire est d'espérance finie car la série numérique $\sum P(Z \geqslant n)$ converge. Et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(Z \geqslant n) = \sum_{n=1}^{+\infty}(1 - P(Z \leqslant n-1)) = \sum_{n=1}^{+\infty}(1-(1-q^{n-1})^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-(1-q^n)^2)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n}(2+q^n) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} q^{3n} = \frac{2}{1-q^2} + \frac{1}{1-q^3}.\end{aligned}$$

132. RMS 2017 192 ENS PC

(a) Pour tout $\lambda > 0$, soit X_λ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Soit $c > 0$: montrer que $P(|X_\lambda - \lambda| \geqslant c\lambda) \to 0$ lorsque $\lambda \to +\infty$.

(b) Soient, pour tout $\lambda > 0$, des variables aléatoires indépendantes $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Étudier l'espérance de $\Delta_\lambda = B_\lambda^2 - 4A_\lambda C_\lambda$.

(c) Soit $E_\lambda(c) = \big((|A_\lambda - \lambda| < c\lambda\big) \cap \big(|B_\lambda - \lambda| < c\lambda\big) \cap \big(|C_\lambda - \lambda| < c\lambda)\big)$. Montrer que $E_\lambda(\frac{1}{3}) \subset (\Delta_\lambda < 0)$.

(d) Déterminer la limite, lorsque $\lambda \to +\infty$, de la probabilité que le polynôme $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ ait toutes ses racines réelles.

Solution. —

(a) Comme X_λ possède une variance, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $P(|X_\lambda - E(X_\lambda)| \geqslant c\lambda) \leqslant \frac{V(X_\lambda)}{(c\lambda)^2}$. Comme $E(X_\lambda) = V(X_\lambda) = \lambda$, on obtient

$$P(|X_\lambda - \lambda| \geqslant c\lambda) \leqslant \frac{1}{c^2\lambda} \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) On sait que $V(B_\lambda) = \lambda$, et la formule de König-Huyghens dit que $V(B_\lambda) = E(B_\lambda^2) - [E(B_\lambda)]^2$, donc $E(B_\lambda^2) = \lambda + \lambda^2$. Il en résulte que (en utilisant aussi l'indépendance de A_λ et C_λ) :

$$E(\Delta_\lambda) = E(B_\lambda^2) - 4E(A_\lambda C_\lambda) = E(B_\lambda^2) - 4E(A_\lambda)E(C_\lambda) = \lambda + \lambda^2 - 4\lambda^2 = \lambda - 3\lambda^2.$$

Cette espérance tend vers $-\infty$ quand $\lambda \to +\infty$, ce qui laisse penser que le polynôme étudié va avoir une probabilité petite d'avoir ses racines réelles quand $\lambda \to +\infty$.

(c) $(|Y - \lambda| < c\lambda) = ((1-c)\lambda < Y < (1+c)\lambda)$ avec $(1-c)\lambda > 0$, où Y désigne indifféremment A_λ, B_λ ou C_λ. L'événement $E_\lambda(c)$ implique (en notant que, comme $c \leqslant 1$, tous les facteurs sont positifs) :

$$\Delta_\lambda < \left((1+c)^2 - 4(1-c)^2\right)\lambda^2 = (1+c+2(1-c))(1+c-2(1-c))\lambda^2 = (3-c)(-1+3c)\lambda^2.$$

On en déduit que $E_\lambda(\frac{1}{3}) \subset (\Delta_\lambda < 0)$

(d) Par indépendance,

$$P(E_\lambda(c)) = P\big(|A_\lambda - \lambda| < c\lambda\big)P\big(|B_\lambda - \lambda| < c\lambda\big)P\big(|C_\lambda - \lambda| < c\lambda\big) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Or, si $c = \frac{1}{3}$, alors on a l'inclusion $E_\lambda(c) \subset (\Delta_\lambda < 0)$, de sorte que $P(\Delta_\lambda < 0) \to 1$ quand $\lambda \to +\infty$. Donc la probabilité que $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ ait toutes ses racines réelles tend vers zéro quand λ tend vers l'infini.

133. RMS 2017 1077 Centrale PSI

Mots-clés : marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$

On munit $\mathbb{R}^2$ de son repère orthonormé que l'on note $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Un marcheur, initialement en O, se déplace à chaque onstant n d'un pas dans l'une des quatre directions (nord, sud, est, ouest) de manière équiprobable. On note $A_n = (X_n, Y_n)$ sa position à l'instant n. On note aussi Z_n la distance du marcheur au point O à l'instant n.

(a) Déterminer l'espérance et la variance de X_n.

(b) Les deux variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ? Déterminer leur covariance.

(c) Montrer que $E(Z_n) \leqslant \sqrt{n}$.

Solution. —

(a) Le pas (U_k, V_k) effectué à l'étape $k \geqslant 1$ suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{(1,0); (-1,0); (0,1); (0,-1)\}$. Cela entraîne que les lois marginales de U_k et V_k sont les mêmes : leur image est $\{-1, 0, 1\}$ et

$$P(U_k = 1) = P(U_k = -1) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(U_k = 0) = \frac{1}{2}.$$

Avec ces notations,

$$X_n = U_1 + \cdots + U_n$$
$$Y_n = W_1 + \cdots + W_n.$$

De la linéarité de l'espérance et de $E(Uk) = 0 = E(V_k)$ pour tout k, on tire que $E(X_n) = E(Y_n) = 0$. De plus les variances s'ajoutent car les variables aléatoires U_k sont deux à deux indépendantes (et de même pour les V_k), or $V(Uk) = \frac{1}{2} = V(V_k)$ pour tout k, d'où $V(X_n) = V(Y_n) = \frac{n}{2}$.

(b) $Cov(X_n, Y_n) = E(X_nY_n) - E(X_n)E(Y_n) = E(X_nY_n)$ car les variables aléatoires X_n et Y_n sont centrées d'après la question précédente.
De plus $X_nY_n = (U_1 + \cdots + U_n)(V_1 + \cdots + V_n) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} U_iV_j$. Or, pour tout $i \neq j$, les deux variables U_i et V_j sont indépendantes et par suite $E(U_iV_j) = E(U_i)E(V_j) = 0$. D'où $E(X_nY_n) = \sum_{i=1}^n E(U_iV_i) = 0$ car $E(U_iV_i) = 0$ pour tout i d'après la loi conjointe énoncée à la première question.
Les variables aléatoires X_n et Y_n sont donc décorrélées mais elles ne sont pas indépendantes. En effet $P(X_n = n, Y_n = n) = 0$ car l'événement (X_n, Y_n) est impossible tandis que $P(X_n = n)P(Y_n = n) \neq 0$ car $P(X_n = n) = \frac{1}{4^n} = P(Y_n = n)$.

(c) Comme $Z_n^2 = X_n^2 + Y_n^2$, on a $E(Z_n^2) = E(X_n^2) + E(Y_n^2) = V(X_n) + V(Y_n)$, la dernière égalité résultant de ce que X_n et Y_n sont des variables centrées. La question précédente montre alors que $E(Z_n^2) = n$. Comme une variance est toujours positive, on a $V(Z_n) = E(Z_n^2) - [E(Z_n)]^2 \geqslant 0$, donc

$$E(Z_n) \leqslant \sqrt{E(Z_n^2)} = \sqrt{n}.$$

Autre méthode — On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$ aux variables aléatoires $X = Z_n$ et $Y = 1$.

134. RMS 2016 530 Mines Ponts PSI

Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2a$ boules blanches et a boules noires indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages avec remise d'une boule de l'urne. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de tirages effectués lorsqu'on obtient pour la première fois deux boules noires lors de deux tirages consécutifs.

(a) Montrer que la suite $(P(X \geqslant n))$ satisfait une relation de récurrence d'ordre 2. En déduire la loi de X.

(b) Montrer que X est d'espérance finie et calculer $E(X)$.

Solution. —

(a) On note B_n l'événement « on tire une boule blanche au n-ème tirage ».
Soit $n \in \mathbb{N}$. L'événement $(X \geqslant n)$ est l'événement « il n'y a pas eu 2 boules noires consécutives au cours des $n-1$ premiers tirages ». D'où $P(X \geqslant 0) = P(X \geqslant 1) = P(X \geqslant 2) = 1$.
Pour tout $n \geqslant 3$,

$$(X \geqslant n) = ((X \geqslant n) \cap B_{n-1}) \bigcup \left((X \geqslant n) \cap \overline{B_{n-1}}\right),$$

et cette union est dijointe, donc les probabilités s'ajouteront. De plus $(X \geqslant n) \cap B_{n-1} = (X \geqslant n-1) \cap B_{n-1}$, et $(X \geqslant n) \cap \overline{B_{n-1}} = (X \geqslant n-2) \cap B_{n-2} \cap \overline{B_{n-1}}$, d'où, par indépendance des tirages successifs,

$$P(X \geqslant n) = \frac{2}{3}P(X \geqslant n-1) + \frac{2}{9}P(X \geqslant n-2).$$

L'équation caractéristique $r^2 = \frac{2}{3}r + \frac{2}{9}$ de la relation de récurrence ci-dessus a pour solutions $\frac{1\pm\sqrt{3}}{3}$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X \geqslant n) = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^n,$$

où $\alpha(\frac{1-\sqrt{3}}{3}) + \beta(\frac{1+\sqrt{3}}{3}) = P(X \geqslant 1) = 1$, et $\alpha(\frac{1-\sqrt{3}}{3})^2 + \beta(\frac{1+\sqrt{3}}{3})^2 = P(X \geqslant 2) = 1$, i.e. après calculs $\alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$ et $\beta = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$. La loi de X est donc donnée par $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et

$$\forall n \in X(\Omega), \quad P(X = n) = P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n+1) = \cdots = \frac{3+\sqrt{3}}{12}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{12}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^n,$$

cette formule étant encore valable pour $n = 1$.

(b) On sait que X est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X \geqslant n)$ converge, auquel cas $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.

Or on vérifie que $|\frac{1\pm\sqrt{3}}{3}| < 1$, donc les séries géométriques $\sum(\frac{1\pm\sqrt{3}}{3})^n$ convergent. Ainsi la série $\sum P(X \geqslant n)$ est convergente car c'est une superposition de deux séries convergentes. Et

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n) = \frac{3-\sqrt{3}}{4} \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1-\sqrt{3}}{3}} + \frac{3+\sqrt{3}}{4} \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1+\sqrt{3}}{3}} = \cdots = 12.$$

135. RMS 2024 172 ENS MP MPI

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes telle que $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Comparer $E(f(X))$ et $f(E(X))$.

(b) On dit que $X \leq_c Y$ si, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, $E(f(X)) \leq E(f(Y))$.

i. Donner un exemple de couple (X, Y) tel que $X \neq Y$ et $X \leq_c Y$.

ii. Montrer que, si $X \leq_c Y$, alors $E(X) = E(Y)$ et $V(X) \leq V(Y)$.

Solution. —

(a) Les variables aléatoires X et $f(X)$ sont d'espérance finie car l'ensemble $X(\Omega)$ est fini.

D'après le théorème de tranfert, $E(f(X)) = \sum_{a \in X(\Omega)} P(X = a)f(a)$.

D'après l'inégalité de Jensen, $f(E(X)) = f(\sum_{a \in X(\Omega)} aP(X = a)) \leq \sum_{a \in X(\Omega)} P(X = a)f(a)$ car f est convexe, $\sum_{a \in X(\Omega)} P(X = a) = 1$ et $\forall a \in X(\Omega),\ P(X = a) \geq 0$.

(b) i. On pose $X = 0$ et Y suivant la loi $P(Y = 1) = \frac{1}{2} = P(Y = -1)$. Si f est convexe, alors $E(f(X)) = f(0) \leq \frac{1}{2}f(-1) + \frac{1}{2}f(+1)$.

ii. Pour tout réel a, la fonction $x \mapsto ax$ est convexe, d'où $E(aX) \leq E(aY)$, donc $aE(X) \leq aE(Y)$. C'est vrai en particulier si $a = 1$ et si $a = -1$. Donc $E(X) = E(Y)$.

Posons $m = E(X) = E(Y)$. La fonction $x \mapsto (x - m)^2$ est convexe, d'où $V(X) = E(f(X)) \leq E(f(Y)) = V(Y)$.

Commentaires :

1. Laissez entrevoir à l'examinateur dès le début de l'oral ce que vous avez su faire ou non de tous les exercices, par des formules du type « J'ai résolu, sauf erreur, le deuxième exercice et les questions 1 et 3 du premier exercice. Dans la question 2, je n'ai pas encore conclu mais je pense à un équivalent ou, peut-être à une comparaison série-intégrale. » Cela permettra à l'examinateur de vous relancer sur une des pistes. Et vous évitera la frustration, pris par le temps, de devoir sortir de la salle en fin d'oral en donnant l'impression de ne pas avoir touché à une question que vous aviez pourtant abordée.
2. À l'oral, au contraire de l'écrit, on annonce le résultat ou la conclusion **puis** on en fait le calcul ou la preuve. Parce que :
   — il est chronophage de prouver un résultat erroné ;
   — l'examinateur vous dispensera parfois de développer le calcul d'un résultat, s'il constate que vous avez obtenu le bon résultat. Rien ne vous interdit d'ailleurs, après lui avoir exposé le résultat, de lui demander : « Voulez-vous que je détaille le calcul (ou la preuve) ? »
3. Ne pas dire « On voit que » et ne surtout pas dire « On voit directement que » ni « clairement » ni « facilement »ni « immédiatement ».
4. On évitera de répéter « du coup »ou « de base ».
5. Si vous écrivez gros, ou en désordre, divisez votre tableau dès le début de l'oral. N'oubliez pas d'appuyer sur la craie.
6. Une indication de l'examinateur n'est pas un piège, ne pas en tenir compte est une bêtise et les bêtises font perdre des points.
7. On ne se précipite pas pour répondre à une question de l'examinateur : « Il faut tourner sept fois sa langue dans sa bouche avant de parler. »
8. Faire un dessin :
   — s'il est question de projection orthogonale ou de Pythagore ;
   — si vous voulez décrire une rotation autour d'un axe (cela vaut mieux que de faire des gestes) ;
   — si vous voulez décrire les propriétés d'une fonction comme « $\forall x \in \mathbb{R},\ |\mathrm{Arctan}(x)| \leq \pi/2$ », « $\forall x \geq 0,\ \sin(x) \leq x$ », « $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$ »ou « $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geq 1+x$ »
   — si vous comparez série et intégrale ;
   — si vous voulez discuter la convergence d'une série entière en indiquant R et $-R$.
9. Ne pas dire « L'intégrale converge **quand** $x > 0$ » mais dire « **si** » ou « **si, et seulement si** ».
10. « Il faut que » ne signifie pas « il faut et il suffit que ».
11. $x < 0$ se dit « x est strictement inférieur à 0 »ou « x est strictement négatif » mais pas « x est inférieur à 0 »ni « x est négatif »
12. Ne pas dire « Chacun de ces événements est indépendant » mais « Ces événements sont indépendants » ou (ce n'est pas la même chose) « indépendants deux à deux ».
13. Ne pas dire : « ça converge »(l'intégrale, la suite, la série ?). Ne pas dire « La suite de fonctions converge »car une suite de fonctions converge simplement, voire uniformément. Ne pas dire « La série de fonctions converge »car une série de fonctions converge simplement voire uniformément voire normalement.
14. « L'union $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est disjointe »ne signifie pas « $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \cap F_{n+1} = \emptyset$ »mais signifie « $\forall i \neq j,\ F_i \cap F_j$ », autrement dit « les événements sont disjoints deux à deux »et non pas « chaque événement est disjoint de son successeur ».
15. « Soit i est une valeur propre, soit $-i$ l'est »est une manière (maladroite) de dire que « Ou bien i est une valeur propre, ou bien $-i$ l'est ». À ne pas confondre avec « i est une valeur propre ou $-i$ l'est ».
16. On compare les fonctions (positives) et non les intégrales pour conclure sur la convergence voire sur la comparaison des intégrales. Idem pour les suites et les séries.
17. En proba : d'abord les événements (est-ce une intersection ? d'événements indépendants ? ou une union ? disjointe ?), ensuite leur proba.
18. Les « éléments propres » d'une matrice = ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.