Mines Telecom - Algèbre/Proba 1

Exercice 1

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ telle que $f : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que f est linéaire et déterminer son image et son noyau.

De façon immédiate f est linéaire. De plus on remarque que $f\left(X^k\right) = kX^{k-1} + \cdots + 1$ en particulier $\deg(f(P)) = \deg(P) - 1$. On en déduit alors que $\ker(f) = \mathbb{R}_0\left[X\right]$.

D'après ce qui précède l'espace $\mathbb{R}_n\left[X\right]$ est stable par f, dès lors on note f_n l'endomorphisme induit, et avec ce qui précède on a $\operatorname{Im}(f_n) = \mathbb{R}_{n-1}\left[X\right]$ car la famille $(f_n(X), \ldots, f_n(X^n))$ est échelonnée en degré et contenue dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est donc une base. Ainsi pour $P \in \mathbb{R}[X]$ il existe n tel que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc f est subjective.

2. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ montrer qu'il existe un unique polynôme P tel que $f(P) = Q$ et $P(0) = 0$.

D'après la surjectivité de f, il existe P_0 tel que $f(P_0) = Q$, de plus l'ensemble des polynôme vérifiant cette relation s'écrivent $P_0 + \lambda$ où $\lambda \in \ker(f) = \mathbb{R}$ et donc avec $\lambda = -P_0(0)$ on obtient le polynôme désiré.

3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

D'après la question précédente il existe un unique polynôme P tel que $f(P) = X^2$ et $P(0) = 0$. On cherche donc P sous la forme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX$, il vient :

$$\begin{aligned}
P(X+1) - P(X) = X^2 &\iff a\left(X+1\right)^3 + b\left(X+1\right)^2 + x\left(X+1\right) - aX^3 - bX^2 - c = X^2 \\
&\iff 3aX^2 + \left(3a+2b\right)X + a + b + c = X^2 \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} 3a & = & 1 \\ 3a+2b & = & 0 \\ a+b+c & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

En résolvant ce système on trouve $P(X) = \frac{1}{6}X\left(X-1\right)\left(2X-1\right)$, et par suite :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} P(k+1) - P(k) \\
&= P(n+1) \\
&= \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}
\end{aligned}$$

Exercice 2

Soit $E = [\![1, n]\!]$.

1. Quel est le nombre de couple $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$?

Pour fabriquer un tel couple il faut commencer par choisir un entier $k \in [\![1, n]\!]$ représentant le cardinal de A. Puis il faut choisir les k éléments formant l'ensemble A, et finalement il ne reste plus qu'à choisir une partie de $E \setminus A$ afin de former B, il y en a 2^{n-k}. Ainsi le cardinal recherché est :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \left(1+2\right)^n = 3^n$$

2. Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, on pioche une poignée de boules. Autrement dit on "pioche" une partie de E suivant la loi uniforme sur $\mathcal{P}(E)$, en particulier on peut ne rien piocher. Ensuite on remet les boules dans l'urne, et on effectue une deuxième pioche de la même manière. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune boule en commun entre les deux pioches ?

Notons X la variable aléatoire renvoyant le résultat de la première pioche, et Y celle renvoyant le résultat de la deuxième pioche. On remarque alors que X et Y sont indépendantes, au vu de ce que l'énoncé suggère, et suive toutes les deux la loi uniforme sur $\mathcal{P}(E)$, de plus on remarque que l'on cherche :

$$\mathbb{P}(X \cap Y = \varnothing) = \mathbb{P}\big(X \subset \overline{Y}\big)$$

Comme X et Y sont i.i.d on en déduit à l'aide de la première question que :

$$\mathbb{P}(X \cap Y = \varnothing) = \frac{3^n}{\left|\mathcal{P}(E)^2\right|} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Mines Telecom - Algèbre/Proba 2

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$, et de loi de probabilité $\mathbb{P}(X = n) = p_n$ pour tout entier n. La fonction génératrice de X, notée G_X, est alors définie par $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n t^n$.

1. Prouver que $]-1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.

Comme X est une VA, sa loi est une loi de probabilité, en particulier la série $\sum p_n = 1$ on en déduit que la série entière définissant G_X est de rayon de convergence supérieure ou égale à 1. En particulier $]-1, 1[$ est bien inclus dans l'ensemble de définition de G_X.

2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendants à valeur dans $\mathbb{N}$. On pose $S = X_1 + X_2$. Démontrer que $\forall t \in\,]-1, 1[\,,\; G_S(t) = G_{X_1}(t)\, G_{X_2}(t)$:

2.a. En utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.

Notons R_1 le rayon de convergence de G_{X_1}, ainsi que R_2 celui de la série définissant G_{X_2}, puis R le rayon de convergence de la sérié entière produit $\sum c_n t^n$ où :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k) \times \mathbb{P}(X_2 = n-k)$$

On sait d'après le cours que $R \geq \min(R_1, R_2)$, mais d'après la question précédente on sait que $R_1 \geq 1$ et $R_2 \geq 1$ d'où $R \geq 1$. Dès lors par produit de Cauchy on a l'égalité :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = n)\, t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_2 = n)\, t^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k) \times \mathbb{P}(X_2 = n-k)\right) t^n$$

De plus pour $n \in \mathbb{N}$ on a les égalité d'évènements suivants :

$$(S = n) = (X_1 + X_2 = n) = \bigcup_{k=0}^{n} \Big[(X_1 = k) \cap (X_2 = n-k)\Big]$$

Comme la dernière écrite est une union disjointe d'évènements on obtient la formule :

$$\mathbb{P}(S=n)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X_1=k)\times\mathbb{P}(X_2=n-k)$$

Ainsi d'après ce qui précède on a l'égalité :

$$\forall t\in\,]-1,1[\,,\ G_{X_1}(t)\,G_{X_2}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S=n)\,t^n=G_S(t)$$

D'où le résultat.

2.b. En utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t)=E\left[t^X\right]$.

Soit $t\in\,]-1,1[$ d'après la première question, les variables aléatoires t^{X_1} et t^{X_2} admettent une espérance. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, il en est de même pour t^{X_1} et t^{X_2}, dès lors on a :

$$E\left[t^{X_1+X_2}\right]=E\left[t^{X_1}\times t^{X_2}\right]=E\left[t^{X_1}\right]\times E\left[t^{X_2}\right]$$

L'égalité précédente se traduit par $G_S(t)=G_{X_1}(t)\,G_{X_2}(t)$

3. Dans cette question on admet que le résultat précédent est vrai également pour n variables aléatoires indépendants à valeurs dans $\mathbb{N}$.

   Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. Soit $n\in\mathbb{N}$, on effectue n tirage successifs, avec ,remise, d'une boule du sac. On note alors S_n la somme des numéros tirés. Pour $t\in\,]-1,1[$ déterminer la valeur de $G_{S_n}(t)$.

On note X_i la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du i-ième tirage. De sorte que l'on peut écrire $S=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$. Les tirages étant effectués avec remise, il est pertinent de supposé les X_i indépendantes, et donc d'après le résultat précédent on a :

$$G_S(t)=\prod_{i=1}^{n}G_{X_i}(t)$$

De plus on remarque que les X_i ont la même loi, à savoir $\mathbb{P}(X_i=0)=\frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X_i=1)=\frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_i=2)=\frac{1}{4}$. Comme on sait que la fonction génératrice caractérise la loi, on en déduit que $\forall i\in\mathbb{N},\ G_{X_i}=G_{X_1}$. Enfin à l'aide des valeurs de la loi on trouve :

$$G_{X_1}(t)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}t^2=\frac{1}{4}\left(t+1\right)^2$$

Ainsi on obtient une expression de G_S à savoir :

$$G_S(t)=\frac{1}{4^n}\left(t+1\right)^{2n}=\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{k}{2n}t^k$$

Comme par définition $G_S(t)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S=k)\,t^k$ par unicité du développement en série entière on en déduit que S est à valeur dans $[\![0,2n]\!]$ et de plus on a :

$$\forall k\in[\![0,2n]\!],\ \mathbb{P}(S=k)=\binom{k}{2n}\frac{1}{4^n}=\binom{k}{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$$

On reconnaît alors la série génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $\left(2n,\frac{1}{2}\right)$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on peut affirmer que S suit une telle loi binomiale.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - f - 2Id = 0$.

1. Prouver que f est bijective et exprimé f^{-1}.

D'après la relation vérifiée par f on a :

$$f \circ \left[\frac{1}{2}(f - Id)\right] = Id = \left[\frac{1}{2}(f - Id)\right] \circ f$$

On en déduit alors que f est bijective et de plus on a $f^{-1} = \frac{1}{2}(f - Id)$.

2. Prouver que $E = \ker(f + Id) \oplus \ker(f - 2Id)$.

2.a. En utilisant le lemme des noyaux.

On remarque que $P(X) = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ comme il s'agit d'un polynôme annulateur de f par définition, on obtient par le lemme des noyaux la relation :

$$\ker(P(f)) = \ker(f + Id) \oplus \ker(f - 2Id)$$

Finalement comme P est annulateur on en conclut que $\ker(P(f)) = E$ d'où le résultat.

2.b. Sans utiliser le lemme des noyaux.

On procède par analyse/synthèse :
Pour $x \in E$ on suppose que $x = a + b$ avec $a \in \ker(f + Id)$ et $b \in \ker(f - 2Id)$, on a alors :

$$f(a) = -a \qquad f(b) = 2b$$

Dès lors par linéarité de f on trouve $f(x) = -a + 2b$, ce qui nous amène à poser $a = \frac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \frac{x + f(x)}{3}$.
Réciproquement, pour $x \in E$ on pose $a = \frac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \frac{x + f(x)}{3}$. On a bien $x = a + b$ et de plus :

$$\begin{aligned}(f + Id)(a) &= \frac{1}{3}\Big[2f(x) - f^2(x) + 2x - f(x)\Big] \\ &= \frac{-1}{3}\big(f^2(x) - f(x) - x\big) \\ &= \frac{-1}{3}\big(f^2 - f + Id\big)(x) = 0\end{aligned}$$

De même on montre que $(f - 2Id)(b) = 0$ on en conclut alors la somme directe demandé.

3. On suppose ici que E est de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Im}(f + Id) = \ker(f - 2Id)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(f + Id)$, il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x) + x$ dès lors on a :

$$\begin{aligned}(f - 2Id)(y) &= f(y) - 2y \\ &= f^2(x) + f(x) - 2f(x) - 2x \\ &= f^2(x) - f(x) - 2x \\ &= \big(f^2 - f - 2Id\big)(x) = 0\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Im}(f + Id) \subset \ker(f - 2Id)$, pour conclure de l'égalité, on utilise le théorème du rang (doù le besoin de se placer en dimension finie), pour obtenir :

$$\dim \mathrm{Im}(f + Id) = \dim E - \dim \ker(f + Id) = \dim \ker(f - 2Id)$$

D'où l'égalité.

Mines Telecom - Analyse 1

Exercice 1

On note $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On considère alors $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0$$

1. Justifier qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f.

Par définition f est continue sur un segment, dès lors on en déduit par le théorème d'approximation de Weierstrass l'existence d'une telle suite.

2. Démontrer que :

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 P_n(t)\,f(t)\,dt$$

Comme $P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$, pour intervertir limite et intégrale sur un segment on recherche la convergence uniforme de $(P_n \times f)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f^2. Or on a pour $t \in [0,1]$:

$$\left|P_n(t)\,f(t) - f^2(t)\right| = |f(t)| \times |P_n(t) - f(t)| \leq \|f\|_\infty \times \|P_n - f\|_\infty$$

Or f est continue sur $[0,1]$ donc bornée sur ce segment, et de plus la convergence uniforme de (P_n) vers f implique que la limite du membre de droite tends vers 0 lorsque n tends vers $+\infty$. Comme on a majorée par une quantité indépendante de t on en déduit que la convergence uniforme désirée et donc la possibilité d'intervertir et le résultat.

3. En déduire que f est la fonction nulle sur $[0,1]$.

On commence par calculer $\int_0^1 P_n(t)\,f(t)\,dt$, pour cela on considère que l'on peut écrire P_n sous la forme :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k} X^k$$

D'où par linéarité de l'intégrale on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 P_n(t)\,f(t)\,dt &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k} t^k\right) f(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k} \int_0^1 t^k f(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k} \times 0 = 0
\end{aligned}$$

Dès lors par passage à la limite et en utilisant la question précédente on en déduit que $\int_0^1 f^2(t)\,dt = 0$. Comme f est continue f^2 l'est aussi, de plus il s'agit d'une fonction positive d'intégrale nulle, on peut alors affirmer que $f^2 = 0$ puis que $f = 0$.

Exercice 2

On pose pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$$

1. Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}$.

Si $x = 0$ il n'y a pas de problème, sinon $\sin(xt) \underset{t \to 0}{\sim} xt$ et donc la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ se prolonge par continuité en 0. Ainsi prolongée cette fonction est continue sur $[0, +\infty[$ et de plus elle est majorée par la fonction $t \mapsto e^{-t}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$. On en conclut que F est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que F est ce classe $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de F'.

On considère $f : (x,t) \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \cos(xt)\, e^{-t}$ est définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ est une fonction continue et de plus on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-t}$$

Qui est encore intégrable sur $[0, +\infty[$, ainsi par théorème de dérivation sous signe intégrale on en déduit que F est dérivable et que de plus :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\, e^{-t} dt$$

Afin de calculer cette intégrale on pose $\cos(xt) = \Re\big(e^{ixt}\big)$ et on considère $A \in \mathbb{R}$ on a alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^A \Re\big(e^{ixt}\big)\, e^{-t} dt &= \Re\left(\int_0^A e^{(ix-1)t} dt\right) \\
&= \Re\left(\left[\frac{1}{ix-1} e^{(ix-1)t}\right]_0^A\right) \\
&= \Re\left(\frac{1}{ix-1} e^{(ix-1)A} - \frac{1}{ix-1}\right) \\
&= \Re\left(\frac{1}{1-ix}\right) + \Re\left(\frac{1}{ix-1} e^{(ix-1)A}\right)
\end{aligned}$$

Le dernier terme de cette expression tendant vers 0 lorsque A tends vers $+\infty$, on en déduit par passage à la limite :

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \Re\left(\frac{1}{1-ix}\right) \\
&= \frac{1}{|1-ix|^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

3. En déduire une expression simplifié de F.

On en déduit que F est de la forme $F : x \mapsto \arctan(x) + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Or $F(0) = 0$ on en déduit finalement que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \arctan(x)$.

Mines Telecom - Analyse 2

Exercice 1

Soit $a_0 > 0$, on considère la suite définie par $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.

1. Étudier la convergence de la suite (a_n).

Par récurrence immédiate a_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ de plus on a par une inégalité classique $a_{n+1} = \ln(1 + a_n) \leq a_n$ et (a_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0 on en déduit que (a_n) est convergente, soit $l \in \mathbb{R}$ sa limite. Par passage à la limite dans $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$, par continuité de $x \mapsto \ln(1 + x)$ on trouve :

$$l = \ln(1 + l)$$

Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

2. Déterminer un équivalent de $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$, puis en déduire un équivalent simple de a_n.

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} &= \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}a_n} \\
&= \frac{a_n - \ln(1 + a_n)}{\ln(1 + a_n)\, a_n} \\
&= \frac{a_n - \left(a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o\left(a_n^2\right)\right)}{(a_n + o(a_n))\, a_n} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{a_n^2 + o\left(a_n^2\right)}{a_n^2 + o\left(a_n^2\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$. Comme la série de terme constant $\frac{1}{2}$ est divergente et à terme positifs ou nuls, d'après le théorème de sommation des équivalents on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}$$

Après simplification on trouve alors :

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$$

Et de cela on en déduit que $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

3. Déterminer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$. Étudier le comportement au bord.

Comme la série entière $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{2}{n} x^n$ est de rayon de convergence 1, c'est également le cas pour la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$.

Pour $x = 1$, on sait que la série de terme générale $\frac{2}{n}$ diverge par critère de Riemann donc la série de terme général a_n diverge également.

Pour $x = -1$, la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n \,(-1)^n$ est alternée, et comme (a_n) est décroissante et de limite nulle, par le théorème de Leibniz (TSA) on en déduit que la série converge.

Exercice 2

Trouver les courbes C d'équations $y = f(x)$ avec f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ vérifiant la propriété géométrique suivante :
Si $M \in C$ en notant d'une part le point T intersection de la tangente de C en M avec l'axe des abscisses, et d'autre part P le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, alors le point $O = (0, 0)$ est le milieux du segment $[PT]$.

On procède par analyse synthèse, en supposant dans un premier temps qu'une telle courbe existe. On considère alors $M = (a, f(a))$, la tangente de C en M s'exprime alors par l'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Si $f'(a) = 0$ le point T n'est pas correctement défini (même si $f(a) = 0$ la tangente est l'axe des abscisses !), ainsi il est nécessaire que $f'(a) \neq 0$, à partir de là, le point T est donné par :

$$T = \left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}, 0\right)$$

Pour que O soit le milieux de $[PT]$ on doit avoir $P = -T$ or $P = (a, 0)$ d'où on tire :

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} + a = 0$$

Finalement f est solution de l'équation différentielle :

$$f'(a) - \frac{1}{2a} f(a) = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre homogène, les solutions sont donc de la formes :

$$y : x \mapsto \lambda \times e^{-\frac{1}{2}\ln(x)}$$

Autrement dit il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda \times \sqrt{x}$ or on sait que f' ne s'annule pas, ainsi $\lambda \neq 0$.

Pour la synthèse on considère alors $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et on pose $f(x) = \lambda \times \sqrt{x}$, si $M = (a, \lambda \times \sqrt{a})$ alors la tangente à C en M à pour équation :

$$y = \frac{\lambda}{2\sqrt{a}}(x - a) + \lambda \times \sqrt{a}$$

Ainsi cette tangente coupe l'axe des abscisses pour x vérifiant :

$$0 = \frac{\lambda}{2\sqrt{a}}(x - a) + \lambda \times \sqrt{a} \Longleftrightarrow x = -a$$

Dès lors O est bien le milieux de $[PT]$.

Centrale - Analyse

Exercice 1

On définit pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$$

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, et qu'elle est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $x > 0$ l'intégrale est convergente en $+\infty$ car négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$, et intégrable en 0 car majorée par $C\frac{\sin(t)}{t}$ où C est une constante à x fixé.

Pour $x = 0$, on reconnaît l'intégrale de Dirichlet qui est classiquement convergente mais pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Ensuite pour le caractère $\mathcal{C}^1$, on considère $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, avec $a < b$ ainsi que la fonction

$$f : (x, t) \mapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$$

Il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ comme produit/composée de fonction $\mathcal{C}^1$ sur ce même intervalle. De plus on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| &= \left|-t\frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\right| \\ &\leq e^{-at}\end{aligned}$$

On reconnaît dans le dernier membre de droite une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$, et donc d'après le théorème de dérivation sous signe somme, on peut affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$. Et de plus :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \sin(t)\, e^{-xt} dt$$

Comme le résultat est vrai pour a et b quelconque, on en déduit le caractère $\mathcal{C}^1$ de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. En déduire une expression simplifiée de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour calculer la valeur de $F'(x)$ on peut soit effectuer une double IPP, ou alors passer le sinus en exponentielle complexe. Ayant une préférence pour cette dernière, on calcul :

$$\begin{aligned}F'(x) &= \int_0^{+\infty} \sin(t)\, e^{-xt} dt \\ &= \Im\left(\int_0^{+\infty} e^{it-xt} dt\right) \\ &= \Im\left(\left[\frac{1}{i-x} e^{(i-x)t}\right]_0^{+\infty}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{i-x} - \frac{1}{-i-x}\right] \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{-i-x-i+x}{|i-x|^2}\right] \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

On en déduit que F s'exprime sous la forme :

$$F(x) = -\arctan(x) + C$$

Pour déterminer C on va appliquer le théorème de convergence dominée à F. On remarque que pour tout $x > 1$ on a :

$$|f(x, t)| \leq \frac{e^{-t}}{t}$$

En particulier l'hypothèse de domination est satisfaite et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x, t)\, dt = 0$. On en déduit que $C = \frac{\pi}{2}$.

3. L'objectif de cette question est de montrer que F est continue en 0. Pour cela on considère la fonction :

$$G(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$$

3.a. Justifier que G est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, et donner la valeur de sa limite en $+\infty$.

On reconnaît dans G l'expression d'une primitive de la fonction :

$$g(t) = -\frac{\sin(t)}{t}$$

Dès lors G est de continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus par convergence de l'intégrale de Dirichlet, on peut affirmer que G est de limite nulle en $+\infty$.

3.b. Soit $x > 0$, exprimer $F(x) - F(0)$ à l'aide de G. En déduire que F est continue en 0.

L'objectif est d'utiliser la question précédente, ainsi afin de faire apparaître le fonction G on effectue une IPP, on obtient pour $(A, B) \in (\mathbb{R}_+)^2$:

$$\begin{aligned}
\int_B^A \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt - \int_B^A \frac{\sin(t)}{t} dt &= \int_B^A \left(e^{-xt} - 1\right) \frac{\sin(t)}{t} dt \\
&= \int_B^A - \left(e^{-xt} - 1\right) G'(t)\, dt \\
&= -\left[\left(e^{-xt} - 1\right) G(t)\right]_B^A + \int_B^A G(t) \times \left(-xe^{-xt}\right) dt
\end{aligned}$$

Dans le dernier membre de droite le premier terme tend vers 0 quand A tends vers $+\infty$ et B vers 0. De plus par changement de variable dans l'intégrale on obtient par passage à la limite :

$$F(x) - F(0) = \int_0^{+\infty} G\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du$$

Désormais, on peut utiliser la question précédente pour affirmer que $\lim\limits_{x \to 0} G\left(\frac{u}{x}\right) = 0$, comme en plus elle est continue, on en déduit qu'elle est bornée. On peux alors appliquer le théorème de convergence dominée avec $\|G\|_\infty e^{-u}$. On obtient alors :

$$\lim_{x \to 0} F(x) - F(0) = 0$$

En particulier F est continue en 0.

CCINP - Analyse

Exercice 1

On note $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On considère alors $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 t^n f(t)\, dt = 0$$

1. Justifier qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f.

Par définition f est continue sur un segment, dès lors on en déduit par le théorème d'approximation de Weierstrass l'existence d'une telle suite.

2. Démontrer que :

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 P_n(t)\,f(t)\,dt$$

Comme $P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$, pour intervertir limite et intégrale sur un segment on recherche la convergence uniforme de $(P_n \times f)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f^2. Or on a pour $t \in [0,1]$:

$$\left|P_n(t)\,f(t) - f^2(t)\right| = |f(t)| \times |P_n(t) - f(t)| \leq \|f\|_\infty \times \|P_n - f\|_\infty$$

Or f est continue sur $[0,1]$ donc bornée sur ce segment, et de plus la convergence uniforme de (P_n) vers f implique que la limite du membre de droite tends vers 0 lorsque n tends vers $+\infty$. Comme on a majorée par une quantité indépendante de t on en déduit que la convergence uniforme désirée et donc la possibilité d'intervertir et le résultat.

3. En déduire que f est la fonction nulle sur $[0,1]$.

On commence par calculer $\int_0^1 P_n(t)\,f(t)\,dt$, pour cela on considère que l'on peut écrire P_n sous la forme :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k} X^k$$

D'où par linéarité de l'intégrale on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 P_n(t)\,f(t)\,dt &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k} t^k\right) f(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k} \int_0^1 t^k f(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{d_n} a_{n,k} \times 0 = 0
\end{aligned}$$

Dès lors par passage à la limite et en utilisant la question précédente on en déduit que $\int_0^1 f^2(t)\,dt = 0$. Comme f est continue f^2 l'est aussi, de plus il s'agit d'une fonction positive d'intégrale nulle, on peut alors affirmer que $f^2 = 0$ puis que $f = 0$.

Exercice 2

On pose pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$$

1. Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}$.

Si $x = 0$ il n'y a pas de problème, sinon $\sin(xt) \underset{t\to 0}{\sim} xt$ et donc la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ se prolonge par continuité en 0. Ainsi prolongée cette fonction est continue sur $[0,+\infty[$ et de plus elle est majorée par la fonction $t \mapsto e^{-t}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$. On en conclut que F est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que F est ce classe $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de F'.

On considère $f : (x,t) \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \cos(xt)\,e^{-t}$ est définie sur $\mathbb{R} \times]0,+\infty[$.

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ est une fonction continue et de plus on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-t}$$

Qui est encore intégrable sur $[0,+\infty[$, ainsi par théorème de dérivation sous signe intégrale on en déduit que F est dérivable et que de plus :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\, e^{-t} dt$$

Afin de calculer cette intégrale on pose $\cos(xt) = \Re\big(e^{ixt}\big)$ et on considère $A \in \mathbb{R}$ on a alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^A \Re\big(e^{ixt}\big)\, e^{-t} dt &= \Re\left(\int_0^A e^{(ix-1)t} dt\right) \\
&= \Re\left(\left[\frac{1}{ix-1} e^{(ix-1)t}\right]_0^A\right) \\
&= \Re\left(\frac{1}{ix-1} e^{(ix-1)A} - \frac{1}{ix-1}\right) \\
&= \Re\left(\frac{1}{1-ix}\right) + \Re\left(\frac{1}{ix-1} e^{(ix-1)A}\right)
\end{aligned}$$

Le dernier terme de cette expression tendant vers 0 lorsque A tends vers $+\infty$, on en déduit par passage à la limite :

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \Re\left(\frac{1}{1-ix}\right) \\
&= \frac{1}{|1-ix|^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

3. En déduire une expression simplifié de F.

On en déduit que F est de la forme $F : x \mapsto \arctan(x) + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Or $F(0) = 0$ on en déduit finalement que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \arctan(x)$.

Centrale - Algèbre/Proba

Exercice 1

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expérience indépendante et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0,1[$. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.

L'expérience consiste en n répétition d'une épreuve de Bernouilli de paramètre p, dès lors X compte le nombre de succès de ces épreuves, et donc X suit une loi binomiale de paramètre (n,p).

2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

2.a. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer pour $k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y = k | X = i)$.

Soit $i \in [\![0, n]\!]$, sous la condition $(X = i)$, la secrétaire rappelle $n - i$ correspondants lors de la seconde série d'appels et donc :

$$\mathbb{P}(Y = k | X = i) = \begin{cases} \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} & \text{si } k \in [\![0, n-i]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.b. Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres. *Indication* : On pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

On a $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et de plus :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X = i)\, \mathbb{P}(Y = k | X = i)$$

Ainsi d'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} p^k (1-p)^{2n-i-k} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-i-k} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-p}\right)^i \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(1 + \frac{1}{1-p}\right)^k \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k \\
&= \binom{n}{k} (p(2-p))^k (1-p)^{2n-2k} \\
&= \binom{n}{k} (p(2-p))^k \left((1-p)^2\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

On remarque alors que $1 - p(2-p) = 1 - 2p + p^2 = (1-p)^2$ et on peux alors en déduire que Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$.

2.c. Déterminer l'espérance et la variance de Z.

On connaît l'expression de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale, dans le cas de Z on obtient :

$$E[Z] = np(2-p)$$

Mais aussi :

$$V(Z) = np(2-p)(1-p)^2$$