Feuille de T.D. n° 4

Réduction

Exercice 1. Soient a et b deux réels et A la matrice de taille $n \times n$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $b-a$ est une valeur propre de A et déterminer une base du sous-espace propre correspondant.
2. Déterminer, s'il en existe, une matrice inversible P telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ est diagonale.

Exercice 2 (AB & BA)**.**

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Calculer les deux produits matriciels par blocs

$$\begin{pmatrix} xI_n - BA & B \\ 0 & xI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xI_n & B \\ 0 & xI_n - AB \end{pmatrix}.$$

   En déduire que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique et donc le même spectre.
2. Supposons que A est inversible et que AB est diagonalisable. Montrer que BA est diagonalisable.

Exercice 3 ($u \circ v$ & $v \circ u$)**.** Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel.

1. Soit λ une valeur propre de $u \circ v$. Montrer que : si $\lambda \neq 0$, alors λ est aussi une valeur propre de $v \circ u$.
2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que la propriété de la première question reste valable pour $\lambda = 0$.
3. Soit, pour chaque polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$u(P) = P' \quad \text{et} \quad v(P) = \int_0^X P(t)\,dt$$

   Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Conclure.

Exercice 4. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui, à tout polynôme $P(X)$, associe le polynôme :

$$\varphi(P(X)) = X \cdot [P(X) - P(X-1)].$$

1. Déterminer le noyau de φ. L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.
3. Soit f l'endomorphisme induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ par φ. Écrire la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Quel est le spectre de la matrice M ? Cette matrice est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
4. On suppose dans cette question que $n = 2$. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de f.

Exercice 5 (La matrice compagnon).

Soient $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, p scalaires $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$ dans $\mathbb{K}$ et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{p-3} & -a_{p-2} & -a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{pp}(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que λ est une valeur propre de la matrice M si, et seulement si,

$$\lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

de deux manières :
   - en calculant le polynôme caractéristique de M ;
   - en recherchant les vecteurs propres associés au scalaire λ.
2. Quelle est la dimension du sous-espace propre associé à chaque valeur propre λ ? Montrer que la matrice M est diagonalisable si, et seulement si, elle possède p valeurs propres distinctes deux à deux.

Exercice 6 (Discuter suivant les valeurs des paramètres)**.**

Soient a, b et c trois réels. Soient, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs des réels a, b et c ces matrices sont-elles diagonalisables ?

Exercice 7 (Une matrice de rang 1 est diagonalisable *ssi* sa trace n'est pas nulle)**.**

▷ **TD nº 2 exo 4 : matrices de rang 1 et base adaptée**

On considère une matrice M de taille $n \times n$ et de rang 1.

1. On suppose que $\mathrm{tr}(M) = 0$. Montrer que M n'est pas diagonalisable et préciser le spectre de M.
2. Réciproquement, on suppose que $\mathrm{tr}(M) \neq 0$. Montrer que M est diagonalisable et préciser son spectre.

Exercice 8 (Commutation et stabilité ▷ **proposition IV.35**)**.** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le spectre de la matrice A et trouver une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.
2. Soit B une matrice de taille 3×3 qui commute avec A ($AB = BA$). Montrer que B est diagonalisable.

Exercice 9 (Trigonalisation & équations différentielles)**.**

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable. Est-elle trigonalisable ?
2. Montrer qu'il existe deux réels a et b et une matrice inversible P telles que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et les déterminer.
3. En déduire toutes les solutions, sur $\mathbb{R}$, du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) \end{cases}.$$

Exercice 10 (Polynômes annulateurs ▷ **TD n^o 2 exo 14**).

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\operatorname{tr} M)I_n + M$. Trouver un polynôme annulateur de Φ de degré 2 et les éléments propres de Φ. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathcal{M}_n\mathbb{R})$ une matrice de projection et Φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\Phi(M) = PM + MP$. Déterminer un polynôme annulateur de Φ. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 11. Soit une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que $M^5 = M^2$. En déduire une relation d'inclusion entre les deux ensembles $\operatorname{Sp}(M)$ et $\{0, 1, j, j^2\}$, où $j = \mathrm{e}^{i2\pi/3}$.
2. On suppose de plus que $\operatorname{tr}(M) = n$. Montrer que 1 est l'unique valeur propre de la matrice M. Cette matrice est-elle inversible ?
3. Déterminer toutes les matrices M telles que $M^5 = M^2$ et $\operatorname{tr}(M) = n$.

Exercice 12. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(A) \subset \operatorname{Ker}(A^2)$.
2. On suppose que A^2 est diagonalisable.
   Montrer que : A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(A^2)$.
3. Donner un exemple de matrice A telle que A^2 soit diagonalisable mais pas A.

Exercice 13. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit l'endomorphisme

$$f \;:\; \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X],\;\; P(X) \mapsto [(aX+b)P]'.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de (a, b) l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 14. Soient $n-1$ réels $a_1, \dots, a_{n-1}$ non tous nuls. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}).$$

Déterminer son rang et son spectre. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 15. Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles et $f : E \to E$ l'application qui transforme chaque suite réelle $u = (u_n)$ en la suite réelle $v = (v_n)$ définie par

$$v_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}.$$

1. Montrer que l'application f est linéaire.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ?
3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 16 (Diagonaliser la transposée)**.** Soient A et P deux matrices de $\mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que : si une matrice P est inversible, alors sa transposée ${}^tP$ l'est aussi. Exprimer $({}^tP)^{-1}$ en fonction de P^{-1}.
2. On suppose que A est diagonalisable.
   (a) Montrer que ${}^tA$ l'est aussi.
   (b) Comparer les spectres et les dimensions des sous-espaces propres de A et de ${}^tA$.
   (c) Soit P une matrice inversible telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. On note C_j la $j-$ème colonne de P et $X_j = {}^tP^{-1} \cdot P^{-1} \cdot C_j$. Calculer ${}^tAX_j$ et en déduire une base de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de ${}^tA$.

Exercice 17 (Hyperplans & transposée)**.**

1. Soient un entier $n \geq 2$, une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et un vecteur colonne non nul $V = (v_1 \ \cdots \ v_n)^T$. Montrer que l'hyperplan H d'équation

$$v_1x_1 + \cdots + v_nx_n = 0$$

   est stable par A si, et seulement si, V est un vecteur propre de A^T.
2. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$