# Corrigé du T.D. n° 3

*Intégrales*

12 octobre 2024

**Exercice 1.** Montrer que ces intégrales convergent et les calculer :

$$A = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} dx \qquad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} \qquad C = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2} dt$$

**Exercice 2.** Etudiez la convergence des intégrales suivantes :

$$D = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\, dx \qquad E = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\, dx$$
$$F = \int_7^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \ln(x)\, dx \qquad G = \int_0^7 \mathrm{e}^{-x} \ln(x)\, dx$$
$$H = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sin t}}{t}\, dt \qquad I = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin t}}{t}\, dt$$
$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t}\, dt \qquad K = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$$

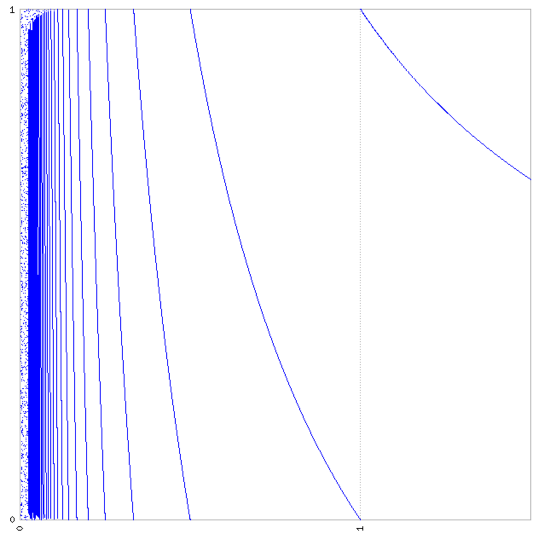
**Exercice 3.** On note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et on rappelle que $H_n - \ln(n)$ tend vers un réel $\gamma$ appelé la *constante d'Euler*. Soit, pour tout réel $t > 0$,

$$f(t) = \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor .$$

1. Représenter graphiquement la fonction $f$ et justifier qu'elle est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ est convergente.
3. Calculer, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $I_n = \int_{1/n}^1 f(t)\,dt$.
4. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$.

---

1. La fonction $f$ est *cpm* sur $]0,+\infty[$ car (c'est la définition) elle est *cpm* sur chaque segment inclus dans $]0,+\infty[$. En effet, un tel segment contient un nombre fini de discontinuités en des abscisses $t_n = \frac{1}{n}$. Et, en chaque $t_n$, la fonction vaut $f(\frac{1}{n}) = 0$, a une limite à gauche égale à 0 et une limite à droite égale à 1.
2. $\forall t > 0$, $0 \leq f(t) \leq 1$. Or l'intégrale $\int_0^1 1\,dt$ converge. Donc l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge aussi.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ : $\displaystyle\int_{1/n}^1 f(t)\,dt = \int_{1/n}^1 \frac{1}{t}\,dt - \int_{1/n}^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$. La première intégrale vaut $\ln(n)$. La seconde vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} k\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = H_n - 1$. Donc $I_n = 1 + \ln(n) - H_n$.




4. D'après la première question, $I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,dt$. D'après la seconde question, $I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1-\gamma$. Donc $\int_0^1 f(t)\,dt = 1-\gamma$.

**Exercice 4** (Oral Petites Mines 2010)**.** Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right) dx$ ?

---

Notons $f\colon x \in ]0,+\infty[ \mapsto \frac{\arctan x}{x}\ln(\frac{2+x}{1+x})$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ est impropre en 0 et en $+\infty$. Elle converge si, et seulement si, les deux intégrales $\int_0^1 f$ et $\int_1^{+\infty} f$ convergent.

La fonction $f$ est continue sur $]0,1]$ et a une limite finie en 0 (égale à $\ln 2$ car $\arctan x \sim x$), d'où l'intégrale $\int_0^1 f$ est convergente car elle est faussement impropre en 0.

Au voisinage de $+\infty$, on a $\ln(\frac{2+x}{1+x}) = \ln\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = \ln\left[(1+\frac{2}{x})(1-\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}))\right] = \ln(1+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})) = \frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$, donc

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2x^2}$$

car $\arctan x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$. Or $\frac{1}{x^2}$ ne change pas de signe et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (d'après le critère de Riemann en $+\infty$), ce qui montre que $\int_1^{+\infty} f$ converge.

Finalement, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge.

**Exercice 5.** On étudie la fonction $F\ :]-\infty,1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ appelée le **dilogarithme**.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ est convergente.
2. On note $\lambda = -\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$. Montrer que $\lambda = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\,dx$.
3. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-kx}\,dx$ converge et la calculer.
4. En déduire que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} x\,\frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}\,dx$.
5. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $x \leq \mathrm{e}^x - 1$.
6. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \lambda - \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$. Qu'en déduire ?

1. L'intégrale I$=\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ est impropre en 0 et en 1. Elle converge si, et seulement si, les deux intégrales $I_1 = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ et $I_2 = \displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ convergent.

   L'intégrale $I_1$ est impropre en 0. Or $\ln(1-t) \underset{t\to 0}{\sim} -t$, d'où $\dfrac{\ln(1-t)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -1$. D'où l'intégrale $I_1$ converge car elle est faussement impropre.

   L'intégrale $I_2$ est impropre en 1. Or $\dfrac{\ln(1-t)}{t} \underset{t\to 1^-}{\sim} \ln(1-t)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^1 \ln(1-t)\,dt$ converge car $\displaystyle\int_{1/2}^c \ln(1-t)\,dt = [(t-1)\ln(1-t)-t]_{1/2}^c \underset{c\to 1^-}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$. Donc l'intégrale $I$ est convergente.

2. On fait le CDV $x=-\ln(1-t)$, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant de $[0,1[$ vers $[0,+\infty[$ :

$$\lambda = -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = -\int_0^{+\infty} \frac{-x}{1-\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{e}^{-x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\,dx.$$

3. On fait une IPP : $\displaystyle\int_0^a x\mathrm{e}^{-kx}\,dx = \left[x\frac{\mathrm{e}^{-kx}}{-k}\right]_0^a - \int_0^a \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{-k}\,dx \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{k^2}$ par croissances comparées. Donc l'intégrale converge et vaut $\dfrac{1}{k^2}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-kx}\,dx = \int_0^{+\infty} x\left(\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{-kx}\right)dx.$

   Or, pour tout $x>0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{-kx} = \mathrm{e}^{-x}\frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$ en reconnaissant une somme géométrique de raison $\mathrm{e}^{-x}\neq 1$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} x\,\frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}\,dx$, cette dernière intégrale étant impropre en 0.

5. Soit $x\geq 0$. D'après le TAF, $\exists \in ]0,x[,\ \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^c\cdot(x-0)$. Or $\mathrm{e}^c\geq 1$. Donc $x\leq \mathrm{e}^x-1$.
   (*Autre méthode* : dresser le tableau des variations de la fonction $[0,+\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto \mathrm{e}^x-x-1$ pour montrer qu'elle est positive. *Ou encore* : utiliser la convexité de la fonction exp.)

6. $\displaystyle\lambda - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\,dx - \int_0^{+\infty} x\,\frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}\,dx = \int_0^{+\infty} x\,\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}\,dx.$

   D'après la question précédente, pour tout $x>0$, $x\leq \mathrm{e}^x-1$, d'où $0\leq \dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}\leq 1$ en divisant par $\mathrm{e}^x-1>0$. D'où $0\leq \displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}\,dx \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\,dx = \frac{1}{n}$. Donc, pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq \lambda - \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\leq \frac{1}{n}$.

   D'après la question précédente et en utilisant le théorème des gendarmes, la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge et $\lambda = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

**Exercice 6.** Soient, pour chaque $n\in\mathbb{N}$,

$$a_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt \qquad \text{et} \qquad b_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt.$$

1. Montrer que ces intégrales généralisées sont convergentes.
2. Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Quelle est la valeur de cette constante ?
3. Montrer que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = I$.
5. (**Lemme de Riemann-Lebesgue**) Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0.$$

6. Soit $f$ la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \text{ si } t \neq 0.$$

Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

7. Etudier $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n)$.

8. (**Intégrale de Dirichlet**) Montrer que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}}$

---

1. Les deux intégrales sont impropres en 0. Or $\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\sin(2n+1)t}{t} \underset{t\to 0}{\sim} 2n+1$, d'où : ces deux fonctions sont continues sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et ont une limite finie en $0^+$, donc les intégrales $a_n$ et $b_n$ sont faussement impropres, donc convergentes.

2. $b_{n+1} - b_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t}{\sin t}\, dt$. Or $\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t = 2\sin t \cdot \cos(2n+2)t$, d'où $b_{n+1} - b_n = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2n+2)t\, dt = 0$. Donc la suite $(b_n)$ est constante (et égale à $b_0 = \dfrac{\pi}{2}$).

3. L'intégrale $I$ est impropre en 0 et en $+\infty$ : Elle converge si, et seulement si, les deux intégrales $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$ et $I_1 = \displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ convergent.
L'intégrale $I_0$ est impropre en 0. Elle converge car c'est l'intégrale $a_0$ de la question 1.
L'intégrale $I_1$ est impropre en $+\infty$. On intègre par parties : $\displaystyle\int_{\pi}^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_{\pi}^{x} - \int_{\pi}^{x} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$.
Or $\left[\dfrac{-\cos t}{t}\right]_{\pi}^{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\pi}$ et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ converge car elle converge absolument car $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$. D'où l'intégrale $I_1$ converge. Donc l'intégrale $I$ converge.

4. Dans cette intégrale impropre en 0, on pose le changement de variable (de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone) $u = (2n+1)t$ ($du = (2n+1)\, dt$, $t$ va de 0 à $\pi/2$, d'où $u$ va de 0 à $(2n+1)\pi/2$) : $a_n = \displaystyle\int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u}\, du \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I$ d'après la question 3.

5. On intègre par parties (c'est possible car $f'$ est continue) :
$\int_0^{\pi/2} f(t)\sin(\lambda t)\, dt = \left[-\frac{1}{\lambda} f(t)\cos(\lambda t)\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi/2} f'(t)\cos(\lambda t)\, dt$.
Or $-\frac{1}{\lambda}\left[f(\pi/2)\cos(\lambda\pi/2) - f(0)\right] \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\lambda \mapsto [f(\pi/2)\cos(\lambda\pi/2) - f(0)]$ est une fonction bornée.
Et $\frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi/2} f'(t)\cos(\lambda t)\, dt \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\lambda \mapsto \int_0^{\pi/2} f'(t)\cos(\lambda t)\, dt$ est une fonction bornée.
En effet $\left|\int_0^{\pi/2} f'(t)\cos(\lambda t)\, dt\right| \leq \int_0^{\pi/2} |f'(t)\cos(\lambda t)|\, dt \leq \int_0^{\pi/2} |f'(t)|\, dt$.

6. $\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin t}{t\sin t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^3/6}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} t/6 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc $f$ est continue en 0. Ailleurs aussi.
$\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{\frac{1}{\sin h} - \frac{1}{h} - 0}{h} \overset{DL}{=} \dfrac{\frac{1}{1 - h^2/6 + h^2\varepsilon(h)} - 1}{h^2} = \dfrac{1}{6} + \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{6}$. D'où $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{6}$.
Pour tout $t \neq 0$, $f'(t) = \dfrac{-\cos t}{\sin^2 t} + \dfrac{1}{t^2}$. D'où $f'(t) \overset{DL}{=} -\dfrac{1 - t^2/2 + t^2\varepsilon(t)}{(t - t^3/6 + t^3\varepsilon(t))^2} + \dfrac{1}{t^2} = -\dfrac{1 - t^2/2 + t^2\varepsilon(t)}{t^2 - t^4/3 + t^4\varepsilon(t)} + \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{-\frac{1 - t^2/2 + t^2\varepsilon(t)}{1 - t^2/3 + t^2\varepsilon(t)} + 1}{t^2} = \dfrac{-(1 - t^2/2 + t^2/3 + t^2\varepsilon(t)) + 1}{t^2} = \dfrac{1}{6} + \varepsilon(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{6}$. D'où $f'$ est continue en 0. Ailleurs aussi. Donc $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Autre méthode — on utilise le théorème de la limite de la dérivée : avec la même preuve que ci-dessus, la fonction $f$ est continue en 0. Avec la même preuve que ci-dessus, $f'(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{6}$. Donc la fonction $f$ est dérivable en 0 et sa dérivée est continue en 0.

7. $b_n - a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t)\sin(2n+1)t\, dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après les deux questions précédentes.

8. On a montré que : $a_n$ tend vers $I$, $b_n$ est constant et égal à $\dfrac{\pi}{2}$, $b_n - a_n$ tend vers 0. Donc $I = \dfrac{\pi}{2}$.

**Exercice 7.** Soit $f\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$. Montrer (de deux manières : avec et sans la ▷ **proposition 15 du chapitre III**) que $f(x)$ est équivalent à $\ln(x)$ quand $x$ tend vers $0^+$.

---

L'idée est de comparer $f(x)$ à $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$. Or

$$g(x) = f(x) - \ln x = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t}\,dt$$

et la fonction $t \mapsto \frac{e^t-1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 (par la valeur 1), donc l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{e^t-1}{t}\,dt$ converge. Posons $a = \int_0^1 \frac{e^t-1}{t}\,dt$. On a ainsi $\lim_{x\to 0^+} [f(x) - \ln x] = -a$, ce qui permet d'écrire, lorsque $x \to 0^+$ :

$$f(x) = \ln x - a + o(1).$$

Donc $f(x) \sim \ln x$ quand $x$ tend vers $0^+$.

**Exercice 8.** 1. Montrer que les intégrales généralisées

$$A = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt \qquad \text{et} \qquad B = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\,dt$$

sont convergentes.

2. Montrer que, pour chaque $n \geq 2$, le réel $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1 + x + \cdots + x^{n-1}}\,dx$ est égal à $\displaystyle\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t^{1/n}\left(1 - t^{1/n}\right)}{1-t}\,dt$.
3. Soient $t \in ]0,1]$ et, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = t^x\left(1 - t^x\right)$. Montrer que la fonction $f$ est deux fois dérivable. Calculer $f(0)$, $f'(0)$ et montrer que, pour tout $x \geq 0$, $|f''(x)| \leq 3(\ln t)^2$.
4. ▷ **Réviser la formule de Taylor avec reste intégral.**
En déduire que, pour tout $t \in ]0,1]$,
$$\left| t^{1/n}\left(1 - t^{1/n}\right) + \frac{1}{n}\ln t \right| \leq \frac{3(\ln t)^2}{2n^2}$$
5. Montrer que $\left| a_n - \dfrac{A}{n^2} \right| \leq \dfrac{3B}{2n^3}$. En déduire un équivalent de $a_n$.

---

1. L'intégrale $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt$ est impropre en 0 et en 1 : soient $A_1 = \int_0^{1/2} \frac{\ln t}{t-1}\,dt$ et $A_2 = \int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt$. L'intégrale $A$ converge si, et seulement si, $A_1$ et $A_2$ convergent.
$\frac{\ln t}{t-1} \underset{t\to 0}{\sim} -\ln t$ (qui ne change pas de signe), or $\int_0^{1/2} \ln t\,dt$ converge, d'où l'intégrale $A_1$ converge aussi.
L'intégrale $A_2$ converge car elle est faussement impropre en 1. En effet, $\frac{\ln t}{t-1} = \frac{\ln 1-u}{-u}$ en posant $t = 1-u$ pour se ramener en 0. Et $\frac{\ln 1-u}{-u} = \frac{-u+o(u)}{-u} = -1 + o(1) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 1$.
De même, l''intégrale $B$ converge si, et seulement si, les intégrales $B_1 = \int_0^{1/2} \frac{\ln^2 t}{1-t}\,dt$ et $B_2 = \int_{1/2}^1 \frac{\ln^2 t}{1-t}\,dt$ convergent.
$\frac{\ln^2 t}{1-t} \underset{t\to 0}{\sim} \ln^2 t$. Or l'intégrale $\int_x^{1/2} \ln^2 t\,dt = [t\ln^2 t]_x^{1/2} - 2\int_x^{1/2} \ln t\,dt$ car les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln^2 t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.
Or $[t\ln^2 t]_x^{1/2}$ a une limite finie quand $x$ tend vers 0 par croissances comparées. D'où l'intégrale $B_1$ est de même nature que $\int_0^{1/2} \ln t\,dt$, qui est convergente. Donc l'intégrale $B_1$ converge.
$B_2 = \int_0^{1/2} \frac{\ln^2(1-x)}{x}\,dx$. Or $\dfrac{\ln^2(1-x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} x$ (qui ne change pas de signe) et $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$ converge. Donc l'intégrale $B_2$ converge aussi.
2. L'intégrale $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)x^n}{1-x^n}\,dx$ est impropre en 1. On pose le changement de variable $t = x^n$ ($dt = nx^{n-1}\,dx$, $x$ va de 0 à 1, d'où $t$ va de 0 à 1) qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone. D'où $a_n = \displaystyle\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t^{1/n}\left(1 - t^{1/n}\right)}{1-t}\,dt$.
3. Soit $t \in ]0,1]$.
Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = t^x\left(1 - t^x\right) = \mathrm{e}^{x\ln t}\left(1 - \mathrm{e}^{x\ln t}\right)$, d'où $f(0) = 0$.
La fonction $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (car c'est un produit de fonctions deux fois dérivables) et $f'(x) = (1 - 2t^x)t^x\ln t$, d'où $f'(0) = -\ln t$.
Puis $f''(x) = t^x\left(1 - 4t^x\right)\ln^2 t$. Or, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq t^x = \mathrm{e}^{x\ln t} \leq 1$ car $t \in ]0,1]$ et $x \geq 0$, d'où : $[f''(x)| \leq 3\ln^2 t$.

4. La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ (car sa dérivée seconde est continue), d'où (formule de Taylor avec reste intégral) : $f(1/n) = f(0) + \frac{1}{n} f'(0) + \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n} - x\right) f''(x)\, dx$. Donc, pour tout $t \in ]0,1]$ :

$$\begin{aligned} \left| t^{1/n}\left(1 - t^{1/n}\right) + \frac{1}{n}\ln t \right| &= \left| \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n} - x\right) f''(x)\, dx \right| \\ &\leq \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n} - x\right) \left|f''(x)\right|\, dx \\ &\leq 3(\ln t)^2 \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n} - x\right) dx \\ &\leq \frac{3(\ln t)^2}{2n^2}. \end{aligned}$$

5. On sait que $\left| t^{1/n}\left(1 - t^{1/n}\right) + \frac{1}{n}\ln t \right| \leq \frac{3(\ln t)^2}{2n^2}$ pour tout $t \in ]0,1]$.

   On divise par $1 - t > 0$ : $\left| \frac{t^{1/n}\left(1 - t^{1/n}\right)}{1-t} + \frac{1}{n}\frac{\ln t}{1-t} \right| \leq \frac{3}{2n^2}\frac{(\ln t)^2}{1-t}$ pour tout $t \in ]0,1[$.

   On intègre (c'est possible car toutes ces intégrales convergent d'après les questions précédentes) :

$$\int_0^1 \left| \frac{t^{1/n}\left(1 - t^{1/n}\right)}{1-t} + \frac{1}{n}\frac{\ln t}{1-t} \right| dt \leq \int_0^1 \frac{3}{2n^2}\frac{(\ln t)^2}{1-t}\, dt.$$

   D'où $\left| \int_0^1 \frac{t^{1/n}\left(1 - t^{1/n}\right)}{1-t}\, dt + \int_0^1 \frac{1}{n}\frac{\ln t}{1-t}\, dt \right| \leq \int_0^1 \frac{3}{2n^2}\frac{(\ln t)^2}{1-t}\, dt.$

   On divise par $n$ : $\left| a_n - \frac{A}{n^2} \right| \leq \frac{3B}{2n^3}$. Puis par $\frac{A}{n^2}$ qui est strictement positif : $\left| \frac{a_n}{A/n^2} - 1 \right| \leq \frac{3B}{2An} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $\frac{a_n}{A/n^2} - 1$ tend vers 0 d'après le théorème des gendarmes. Autrement dit, $\frac{a_n}{A/n^2}$ tend vers 1. Donc $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{A}{n^2}$.

**Exercice 9.** 1. Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln^\alpha(t)\, dt$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ ?

2. Après une intégration par parties, déterminer un équivalent, quand $x$ tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_2^x \ln^\alpha(t)\, dt$.

---

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ : $\frac{\ln^\alpha(t)}{1/t} = t\ln^\alpha(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ sans forme indéterminée si $\alpha \geq 0$ et par croissances comparées si $\alpha < 0$. D'où $\frac{1}{t} = o\left(\ln^\alpha(t)\right)$ quand $t$ tend vers $+\infty$. Or $\ln^\alpha(t)$ ne change pas de signe au voisinage de $+\infty$ et l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ diverge. Donc l'intégrale $\int_2^{+\infty} \ln^\alpha(t)\, dt$ diverge aussi.
2. Soit $x \geq 2$. Les fonctions $u : t \mapsto \ln^\alpha(t)$ et $v : t \mapsto t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, d'où $\int_2^x uv' = [uv]_2^x - \int_2^x u'v$. Donc

$$\int_2^x \ln^\alpha(t)\, dt = x\ln^\alpha(x) - 2\ln^\alpha(2) - \alpha \int_2^x \ln^{\alpha-1}(t)\, dt.$$

   Or $\ln^{\alpha-1}(t) = o\left(\ln^\alpha(t)\right)$ quand $t$ tend vers $+\infty$. De plus $\ln^\alpha(t)$ est positif au voisinage de $+\infty$. Enfin l'intégrale $\int_2^{+\infty} \ln^\alpha(t)\, dt$ diverge. Donc $\int_2^x \ln^{\alpha-1}(t) = o\left(\int_2^x \ln^\alpha(t)\, dt\right)$ ▷ **proposition 15 du chapitre III**. Donc

$$\int_2^x \ln^\alpha(t)\, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln^\alpha(x).$$