Espaces vectoriels de dimension finie

1 Fammilles de vecteurs, bases...

Exercice 1. * Soit U et V deux familles génératrices d'un espaces vectoriel E. On pose $U+V=\{u+v,\ u\in U,\ v\in V\}$. Montrez que $U+V$ est une famille génératrice de E ou donner un contre-exemple.

Solution **1.** . *La réponse est non. Soit $U=(e_1,\cdots,e_n)$ est une base et $V=-U$. Alors la famille $(e_2-e_1,\cdots,e_n-e_1)$ engendre le même espace que $U+V$. C'est un espace de dimension $n-1$ et donc distinct de E.*

Exercice 2. * Montrer que la famille $\left(X^k(1-X)^{n-k}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ pour $\mathbb{K}$ un corps.

Solution **2.** . *La formule du biôme de Newton montre que $X^k(1-X)^{n-k}=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}X^{k+i}$. Donc la matrice de cette famille dans la base canonique est triangulaire inférieur dont la première diagonale est composée de 1. La matrice est inversible.*

Exercice 3. ♡* Soit $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $(I,D,\cdots D^{n-1})$ est libre si et seulement si les λ_i sont deux à deux distincts.

Solution **3.** . *On remarque que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_iD^i=0$ ssi les λ_i sont des racines du polynôme $P=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_iX^i$. Donc $Q=\prod_{\lambda\in\{\lambda_i,\ i\in[\![1,n]\!]\}}(X-\lambda)$ divise P de degré au plus $n-1$. Donc si les λ_i sont deux à deux distincts, alors $P=0$ et sinon, $Q\neq 0$ est de degré au plus $n-1$: $Q=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\beta_iX^i$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\beta_iD^i=0$ et la famille est liée.*

Exercice 4. Soit F un sous-espace vectoriel strict de E. Trouver les endomorphismes de $f\in\mathcal{L}(E)$, tels que f est nulle sur $E\setminus F$.

Solution **4.** . *On sait que $\ker f$ est un sous espace de E et par hypothèse, $E=\ker f\cup F$. Comme $F\neq E$, on sait que $\ker f=E$ et $f=0_E$.*

Exercice 5. Soit $E=\mathbb{K}_3[X]$, $F=\{P\in E\mid P(0)=P(1)=P(2)=0\}$, $G=\{P\in E\mid P(1)=P(2)=P(3)=0\}$ et $H=\{P\in E\mid P(X)=P(-X)\}$. Montrer que $F\oplus G\oplus H=E$.

Solution **5.** . $F=\mathbb{K}.X(X-1)(X-2)$ *et* $G=\mathbb{K}.(X-1)(X-2)(X-3)$ *et* $H=\mathrm{Vect}\,(1,X^2)$.
On vérfie que la famille $(X(X-1)(X-2),(X-1)(X-2)(X-3),1,X^2)$ est libre. Si

$$\alpha X(X-1)(X-2)+\beta(X-1)(X-2)(X-3)+\gamma+\delta X^2=0,$$

alors en évaluant en 1 et en 2, on obtient $\gamma+\delta=0$ et $\gamma+4\delta=0$, d'où $\gamma=\delta=0$. Puis en évaluant en 0 et en 3, on obtient $\alpha=\beta=0$.
On en déduit qe les trois sous-espaces sont en somme directe.

Exercice 6. ♡ ** Soit E un $\mathbb{K}$ de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels.

1. Si $\dim F=\dim G$, montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H tel que $F\oplus H=G\oplus H=E$.
2. Si $\dim F\leq\dim G$, il existe $H\subset H'$ tel que $F\oplus H'=G\oplus H=E$.

Solution **6.** .

1. *On sait $F \cup G$ est un sev ssi $G \subset F$ ou $F \subset G$.*
   On procède par récurrence décroissante sur la dimension de F : si $\dim F = \dim G = \dim E$, alors $\{0\}$ convient. On suppose que si $\dim F = k \leq n$ avec k 0, alors F et G on un supplémentaire commun H.
   Si $\dim F = \dim G = k-1 < n$, alors $F \cup G \neq E$ (cf le rappel). Donc il existe $u \in E \setminus (F \cup G)$. Il vient $F' = F \oplus \mathbb{K}.u$ et $G' = G \oplus \mathbb{K}.v$ sont de même dimension. Par hypothèse de récurrence, il existe $H' \subset E$ tel que $F' \oplus H' = G' \oplus H' = E$. En posant $H = H' \oplus \mathbb{K}u$, on a encore $F \oplus H = G \oplus H = E$.
2. *On ajoute à F un sous-espace vectoriel $F' \subset G$ tel que $\dim F \oplus F' = \dim G$ et on applique 1/.*

Exercice 7. * Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(f_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ définie par $f_{i,j} : (x, y) \mapsto x^i y^j$ est libre.

Solution **7.** . *Dans une somme finie $\sum a_{i,j} x^i y^j$, le coefficient $a_{i,j}$ s'obtient comme $\dfrac{1}{i!j!} \times \dfrac{\partial^{i+j} f_{i,j}}{\partial x^i \partial y^j}(0)$. La conclusion est alors immédiate.*

Exercice 8. ** Pour $a \in \mathbb{R}$ et $t \in [0; +\infty[\backslash 2\mathbb{N}$, on pose $f_{a,t}(x) = |x-a|^t$. Montrer que la famille des $f_{a,t}$ est libre. Pourquoi fallait-il exclure t entier pair.

Solution **8.** . *Notons que $f_{a,t} : x \mapsto |x-a_i|^t$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a_i\}$ et est dérivable en a_i si et seulement si $t > 1$. Dans ce cas, la fonction dérivée vaut $f'_{a,t} : x \mapsto \operatorname{sgn}(x-a_i) \times t \times |x-a_i|^{t-1}$.*
On ne déduit que si t n'est pas un entier alors la dérvivée $\lfloor t \rfloor + 1$ n'existe pas.
De plus, si t est un entier impair, alors $f'_{a,t} : x \mapsto \operatorname{sgn}(x-a_i) \times t \times (x-a_i)^{t-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a_i, +\infty[$ et sur $]-\infty, a_i[$, mais les dérivées t-nième à gauche et à droite ne coïncident pas (elles sont opposées non nulles).
On a montré que $f_{a,t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $t \in 2\mathbb{N}$.
On suppose une relation de dépendance linéaire $a_1 < \cdots < a_l$. Comme t n'est pas un entier pair, la combinaison linéaire avec les termes en $|x-a_i|^t$ doit être $\mathcal{C}^\infty$ en a_i : $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{a_i,t_j} f_{a_i,t_j}$ avec $t_1 < \cdots < t_n$.
Si les α_{a_i,t_j} sont non nuls, alors la dérivée $\lfloor t_1 \rfloor + 1$ n'existe pas. On en déuit que tous les α_{a_i,t_j} sont nuls et la famille est libre.
Si on autorise les puissances paires, le résultats devient complètement faux : $(x^2, (x+1)^2, (x+2)^2, (x+3)^3)$ est une famille de $\mathbb{R}_2[X]$, espace vectoriel de dimension 3, donc la famille est liée.

Exercice 9. * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\beta = (e_1, \cdots, e_n) \in E^n$. On suppose : $\forall f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, $f(e_1) = ... = f(e_n) = 0 \Rightarrow f = 0$. Montrer que β est une base de E.

Solution **9.** . *On procède par contraposée : si $(e_1, \cdots, e_n)$ n'est pas une base, alors $vect(e_1, \cdots, e_n)$ est inclus dans un hyperplan H qui admet un supplémentaire $\mathbb{K}.a$. Dans une base adaptée à $H \oplus \mathbb{R}a$, l'application $f : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_n$ s'annule sur H et donc vérifie $f(e_1) = \cdots = f(e_n) = 0$.*

Exercice 10. ♡ *** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $(F_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels telle que $E = \cup_{i=1}^n F_i$. Montre qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $F_i = E$.

Solution **10.** . *On suppose que E peut s'écrire comme une union finie de sous-espaces vectoriels stricts et soit p le nombre minimal de tels sous-espaces $E = \cup_{i=1}^p F_i$.*
On a $p \geq 2$.
Alors $F_1 \not\subset \cup_{i=2}^p F_i$ car sinon $E = \cup_{i=2}^p = F_i$ contredit la minimalité de p : il existe $v_1 \in F_1 \setminus \cup_{i=2}^p F_i$. De même, il existe $v_2 \in F_2 \setminus \cup_{i=1, i\neq 2}^p F_i$.
La famille (v_1, v_2) est libre et la droite $av_1 + (1-a)v_2$ rencontre chaque F_i en au plus un point.
Or $\mathbb{R}$ est infini, la droite a une infinité de points donc au moins un point qui n'appartient pas à l'union.

2 Applications linéaires, généralités

Exercice 11. ♡♡ ** Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que
$$\operatorname{Im} u + \ker u = E \iff \operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2.$$
La somme est-elle nécessairement en somme directe ?
2. Si E est de diension finie, montrer que l'on a en fait
$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^2 \iff \operatorname{Im} u \oplus \ker u = E.$$

<u>*Solution*</u> **11. .**

1. $\Rightarrow$: On a toujours $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$. Soit $x \in \operatorname{Im} u$, alors $x = u(y)$. Or $y = x_1 + x_2$, $x_1 \in \operatorname{Im} u$, $x_2 \in \ker u$. On en déduit que $u(x) = u(x_1) \in \operatorname{Im} u^2$, d'où l'inclusion inverse.
$\Leftarrow$: Analyse : supposons que tout $x \in E$ s'écrit $x = u(x_1)+x_2$ avec $x_2 \in \ker u$. On a $u(x) = u^2(x_1)$. Comme $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$, alors il existe bien x_1 tel que $u^2(x_1) = u(x)$.
Synthèse : soit x_1 tel que $u(x) = u^2(x_1)$. On écrit $x = u(x_1) + (x - u(x_1))$. Il reste à vérifier que $x - u(x_1) \in \ker u$: $u(x - u(x_1)) = u(x) - u^2(x_1) = 0$. Ce qui termine la preuve.
En dimension infinie, n'importe quelle fonction surjective non injective donne un contre-exemple. L'opérateur de dérivation sur les polynômes convient.

2. En dimension finie, la somme est alors directe par théorème du rang. Une preuve directe classique : le morphisme induit par u $u_{\mathrm{Im},u} : \operatorname{Im} u \to \operatorname{Im} u^2$, $x \mapsto u(x)$ est toujours surjectif sans hypothèse particulière sur u. De plus, l'application est bijective ssi elle est injective et donc ssi $Im\, u \cap \ker u = \{0\}$, ssi $Im\, u \oplus \ker u$ ssi (théorème du rang, car E de dimension finie) $Im\, u \oplus \ker u = E$.

<u>**Exercice 12.**</u>

1. Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{K}^4$ dont l'image égale le noyau.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n paire sur $\mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(E))$. Montrer que
$$\ker u = \operatorname{Im} u \iff \left(u \circ u = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rg} u = \frac{n}{2} \right),$$
(on notera qu'alors n est nécessairement pair !).
3. Montrer que si $\ker u = \operatorname{Im} u$, il existe des vecteurs e_1, ...,$e_{\frac{n}{2}}$ tels que $\left(e_1, \cdots, e_{\frac{n}{2}}, u(e_1), \cdots, u(e_{\frac{n}{2}})\right)$ est une base de E.

<u>*Solution*</u> **12. .**

1. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de $\mathbb{K}^4$, on pose $f(e_1) = f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = e_1)$, $f(e_4) = e_2$.

2. C'est le théorème du rang et $u \circ v = 0$ ssi $Im\, v \subset \ker u$.

3. Il faut procéder comme dans la preuve longue du théorème du rang : on part d'une base quelconque (e_i), alors $(f(e_i))$ engendre l'image, on peut en extraire une base et quitte à renuméroter, on prend $(e_1, \cdots, e_{n/2})$. On sait que le noyau de u est en somme directe, mais c'est Imu, d'où le résultat.

<u>**Exercice 13.**</u> * Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et u,v $\in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que $\dim \operatorname{Ker}(u + v) \leq \dim(\ker u \cap \ker v) + \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v)$.

<u>*Solution*</u> **13. .** *Si $(u + v)(x) = 0$, alors $u(x) = -v(x)$ et donc $u(x) \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v$. En particulier, si $x \in \ker(u + v) \cap \ker u$, alors $v(x) = 0$.*
On en déduit que l'application $\widetilde{u} : \ker(u + v) \to \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v$, $x \mapsto u(x)$ est bien définie et que $\ker \widetilde{u} \subset \ker u \cap \ker v$. Le théorème du rang donne immédiatement l'inégalité.
Notez que si $u = v$, alors, on est, a priori, loin du cas d'égalité ! à l'opposé, si $u = -v$, alors on a égalité.

<u>**Exercice 14.**</u> ** Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que
$$\forall v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = 0 \Rightarrow v \circ u = 0.$$

Solution **14.** *. Si $u = 0_E$, la propriété est vérifiée.*
Si u est inversible, alors $u \circ v = 0 \iff v = 0 \iff v \circ u = 0$. Supposons u non inversible, non nul. Alors, $\operatorname{Im} u, \ker u \neq E$ et $\ker u \neq \{0\}$. Soit F un supplémentaire de $\ker u$. Comme le supplémentaire n'est pas unique, on peut supposer $\operatorname{Im} u \neq F$; rappelons que F et $\operatorname{Im} u$ ont même dimension par théorème du rang. La projection sur $\ker u$ parallèlement à F vérifie $u \circ p = 0$, mais $p(\operatorname{Im} u) \neq 0$.
On a donc montré qu'une condition nécessaire et suffisante est u inversible ou nul.

Exercice 15. *** Soient f et g des endomorphismes d'un espace vectoriel réel E. Montrer que

$$f \circ g \circ f = g \text{ et } g \circ f \circ g = f \Rightarrow \ker(f) \oplus \operatorname{Im} g = E.$$

Solution **15.** *. Les deux égalités montrent que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$ et réciproquement, d'où $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$. Et de même pour les noyaux.*
Ensuite, si $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} g$, alors $x = g(u) = f(v)$ et $f(u) = g(f(g(u)) = 0$, donc $u \in \ker f = \ker g$ et $x = g(u) = 0$.
Si E est de dimension finie, le théorème du rang permet de conclure.
Sinon, $\operatorname{Im} f \oplus \ker f$.
De plus, on substitue dans $g \circ f \circ g = f$ le g de gauche par $f \circ g \circ f$ et on obtient $f \circ g \circ f \circ f \circ g = f$ qui montre que

$$\operatorname{Im} f \subset f(\operatorname{Im} g) = f(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Im} f^2$$

donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ (l'exercice 11 permet de conclure !).
Pour montrer $E = \operatorname{Im} g + \ker f$, on pouvait aussi écrire : pour tout $x \in E$, on a $x = g \circ f \circ f \circ \circ g(x) + (x - g \circ f \circ f \circ \circ g(x))$ et on vérifie que $x - g \circ f \circ f \circ \circ g(x) \in \ker f$.

Exercice 16. Soit n un entier naturel.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que
$$P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n.$$
2. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$P'_{n+1} = (n+1)P_n.$$

En déduire P_0, P_1 et P_2 (on trouvera $P_2 = X^2 - X$).

Solution **16.** *.*

1. *On montre que $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $X \mapsto P(X) + P(X+1)$ est un ismorphisme (par les bases !) et on en déduit l'existence et l'unicité.*
2. *$P'_{n+1}(X) + P'_{n+1}(X+1) = 2(n+1)X^n$ et par unicité de P_n, on a $P'_{n+1} = (n+1)P_n$. On trouve $P_0 = 1$, donc $P'_1 = 2$, donc $P_1 = 2X + b$ et P_1 vérifie la relation d'où b et ainsi de suite.*

Exercice 17. Soit $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tels que $fg = 0$ et $f + g \in GL(\mathbb{C}^n)$. Montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = n$.

Solution **17.** *. La condition $fg = 0$ implique $\operatorname{Im} g \subset \ker f$, donc $\operatorname{rg} g \leq \dim \ker f = n - \operatorname{rg} f$, ce qui donne $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leq n$.*
La condition $f + g$ inversible implique que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \mathbb{C}^n$ et donc $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \geq n$. On en déduit le résultat.

Exercice 18. ** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$u \in \operatorname{Vect}(u^k,\ k \geq 2) \iff E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$$

Solution **18.** *. $\Rightarrow$: supposons $u = a_2u^2 + \cdots + a_lu^l$. La suite des noyaux $\ker u^k$ est croissante et supposons $\ker u \underset{\neq}{\subset} \ker u^2$. Dans ce cas il existe $x \in \ker u^2$, $x \notin \ker u$, mais $u(x) = 0$ ce qui contredit $x \notin \ker u$. Donc $\ker u = \ker u^2$, d'où $\operatorname{Im} u \cap \ker u = \{0\}$ et le résultat.*
$\Leftarrow$: alors u induit une bijection de $\operatorname{Im} u$ dans $\operatorname{Im} u$ car $\operatorname{Im} u$ est un supplémentaire du noyau. Et $u = a_2u^2 + \cdots + a_nu^n$ ssi l'expression est vraie sur $\operatorname{Im} u$ puisque sur $\ker u$, c'est vraie quelque soient les coefficients a_i : on peut donc supposer que u est inversible. Mais alors $(u, u^2, \cdots, u^n, \cdots)$ est une famille liée dans $\mathcal{L}(E)$ de dimension finie, on écrit

$$a_1u + \cdots + a_nu^n = 0.$$

Soit a_i le plus petit indice non nul, on multiplie par u^{-i+1} qui donne $u \in \operatorname{Vect}(u^k,\ k \geq 2)$.

3 Projecteurs

Exercice 19. * Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un automorphisme f et p un projecteur tel que $u = f \circ p$, (resp. $u = p \circ f$).
Montrer que la proposition est fausse en dimension infinie.

Solution **19.** . *Le théorème de factorisation nous dit que si G est un supplémentaire du noyau, alors u induit un isomorphisme noté $\widetilde{u}$ de G dans $Im\, u$.*
Si p est la projection sur G parallèlement à $\ker u$. Soit f dont la restriction à G est u et la restriction à $\ker u$ est un isomorphisme de $\ker u$ vers un supplémentaire de $Im\, u$ (existe car les deux espaces ont même dimension en dimension finie). Alors $u = f \circ p$ car coïncide sur $\ker u$ et sur G.
Pour $p \circ f$, on procède de même avec une projection sur $Im\, u$ parallèlement à un supplémentaire H et f envoie G sur $Im\, u$ par u et $\ker u$ sur H (n'importe quel isomorphisme fait l'affaire).
En dimension infinie, si u est surjective non injective : $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto P'$, alors le résultat est faux car la restriction de f à G dans $Im\, u$ est un isomorphisme, donc le noyau doit être réduit à $\{0\}$.

Exercice 20. * Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, f et g deux endomorphismes tels que $f + g = Id_E$ et $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leq n$. Montrer que f et g sont des projecteurs. Généraliser à p endomorphismes f_1, ..., f_p.

Solution **20.** . *Le théorème du rang implique que $\dim \ker f + \dim \ker g \geq n$, or $f + g = Id_E$ implique que $\ker f \cap \ker g = \{0\}$ donc $\ker f \oplus \ker g = E$ et on vérife facilement que g est la projection sur $\ker f$ (resp f sur $\ker g$) parallèlement à $\ker g$ (resp $\ker f$).*
On montre par récurrence sur p que si $f_1 + \cdots + f_p = Id$ et $rg\, f_1 + \cdots + \operatorname{rg} f_p \leq n$, alors f_1, ..., f_n sont des projecteurs : l'initialisation a déjà été traitée. On suppose la propriété vraie au rang $p-1$ et que $(f_1 + \cdots + f_{p-1}) + f_p = Id_E$, $rg\, f_1 + \cdots + \operatorname{rg} f_p \leq n$. Comme $rg\,(f_1 + \cdots + f_{p-1}) \leq \operatorname{rg} f_1 + \cdots + \operatorname{rg} f_{p-1}$, les applications $f_1 + \cdots + f_{p-1}$ et f_p sont des projecteurs. L'ordre étant arbitraire, on a montré que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, f_i est un projecteur.

Exercice 21. ♡♡ ** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension ≥ 2.

1. Démontrer que les homothéties sont les seuls endomorphismes f de E tels que $\big(x, f(x)\big)$ est une famille liée pour tout $x \in E$.
2. En déduire que les homothéties sont les seuls endomorphismes de E qui commutent avec tous les autres endomorphismes de E.

Solution **21.** .
1. *Soit (e_1, e_2) une famile libre de E (existe car $\dim E \geq 2$, alors $f(e_1) = \lambda_1 e_1$ et $f(e_2) = \lambda_2 e_2$ et $f(e_1 + e_2) = \lambda_3(e_1 + e_2) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2$; la famille étnt libre l'écriture dans la base (e_1, e_2) est unique donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.*
2. *Soit $h \in \mathcal{E}$ tel que $\forall f \in \mathcal{E}$, $h \circ f = f \circ h$. Soit $x \neq 0 \in E$ et p une projection sur x parallèlement à un supplémpentaire de $\mathbb{K}x$. Alors $h(p(x) = p \circ h(x) \in \mathbb{K}x$, or $p(x) = x$ donc pour tout x, $(h(x), x)$ liée et d'après la question d'avant h est une homothétie.*

4 Suite des noyaux-Endomorphismes nilpotents

Exercice 22. ♡♡♡ ** *(La suite des noyaux)* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u^n = u \circ \cdots \circ u$ avec n itétrations. Par convention $u^0 = Id$. On note également $K_n = \ker u^n$ et $I_n = \operatorname{Im} u^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $K_n \subset K_{n+1}$ et $I_{n+1} \subset I_n$.
2. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K_{n_0} = K_{n_0+1}$. Montrer qu'alors $K_n = K_{n_0}$ pout $n \geq n_0$.
3. Même chose avec I_n.
4. On suppose ici que E est de dimension finie. Montrer qu'il existe effectivement un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K_{n_0} = K_{n_0+1}$, et qu'alors on a $I_{n_0} = I_{n_0+1}$ ainsi que $K_{n_0} \oplus I_{n_0}$.
5. Trouver des contre-exemples en dimension infinie.

6. On suppose à nouveau E de dimension finie. Prouver que l'on a toujours l'inégalité :

$$\dim \ker u^{i+j} \leq \dim \ker u^i + \dim \ker u^j$$

On peut aussi montrer que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ des espaces vectoriels de dimension finie, alors $\dim \ker g \circ f \leq \dim \ker f + \dim \ker g$.

Solution **22.** .

1. *Les inclusion ne posent pas de problème.*
2. *On procède par récurrence : au rang n_0 : $K_{n_0} = K_{n_0+1}$. Supposons que $K_n = K_{n+1}$, et montrons que $K_{n+1} = K_{n+2}$. On a montré en 1/ que $K_{n+1} \subset K_{n+2}$.*
   Pour montrer l'inclusion inverse, on prend $x \in K_{n+2}$. Par définition, $f^{n+2}(x) = 0$, donc $f(x) \in K_{n+1} = K_n$ et $f^n(f(x) = 0$ ce qui montre bien que $x \in K_{n+1}$.
3. *On procède de même : si $I_n = I_{n+1}$, il faut montrer que $I_{n+1} \subset I_{n+2}$ (l'autre inclusion est acquise). Soit $y = f^{n+1}(x) \in I_{n+1}$. Comme $f^n(x) \in I_n = I_{n+1}$, il existe x' tel que $f^n(x) = f^{n+1}(x')$ et donc $y = f^{n+2}(x') \in I_{n+2}$.*
4. *Si la suite des images est strictement décroissante, alors la dimension (finie) décroît strictement. Ce qui est absurde, la dimension ne peut prendre des valeurs négatives. On en déduit que la suite se stabilise en dimension finie.*
   On peut raisonner de même avec la suite des noyaux qui ne peut être strictement croissante en dimension finie car majorée par la dimension de l'espace.
   Ou encore, si $K_{n_0} = K_{n_0+1}$, le théorème du rang montre immédiatement que $\dim I_{n_0} = \dim I_{n_0+1}$ et donc la suite des images se stabilise aussi. Enfin l'application induit : $\widetilde{f} : I_{n_0} \to I_{n_0+1}$ est toujours surjective et son noyau vaut $K_{n_0} \cap I_{n_0}$. En dimension finie, un morphisme surjectif entre deux espaces de même dimension est bijective. En particulier, elle est injective, donc son noyau est réduit à $\{0\}$. Ce qui montre que I_{n_0} et K_{n_0} sont en somme directe. Le théorème du rang nous dit qu'alors ils sont supplémentaires.
5. *Si $E = \mathbb{K}[X]$ et $f(P) = P'$, alors la suite des noyaux est strictement croissante tandis que la suite des images est constante égale à E.*
   Si $\psi(P) = XP$, alors la suite des images est strictement croissante tandis la suite des noyaux est constante, égale à $\{0\}$.
6. *considérons l'application linéaire $v : x \in \ker u^{i+j} \mapsto u^i(x) \in \ker u^j$; le noyau de v est $\ker u^i$ et en appliquant le théorème du rang, on obtient l'inégalité.*

Exercice 23. ♡♡♡ *** *Endomorphismes nilpotents* Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On suppose que f est un endomorphisme nilpotent de E : c'est-à-dire $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$.

1. Si f et g sont deux endomorphismes endomorphismes, la somme est-elle nilpotente ? Quelle condition naturelle peut-on poser ?
2. Soit q le plus petit entier non nul tel que $f^q = 0$ (q est l'indice de nilpotence de f)
   (a) Justifier l'existence de $x_0 \in E$ tel que $f^{q-1}(x_0) \neq 0$.
   (b) Montrer que $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{q-1}(x_0))$ est libre.
   (c) En déduire que $q \leq n$ puis que $f^n = 0$.
   (d) Montrer que $f + Id_E$ est inversible.
3. On suppose $q = n$. On veut montrer que le commutant $C(f)$ de f

$$C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ fg = gf\}$$

   vérifie $C(f) = \text{Vect}\,(Id, f, \cdots, f^{n-1})$:
   (a) Montrer l'inclusion : $\text{Vect}\,(Id, f, \cdots, f^{n-1}) \subset C(f)$.
   (b) Soit $g \in C(f)$ et soit un vecteur x_0 comme dans la question 2-a. Soit $(a_0, \cdots, a_{n-1})$ les coordonnées de $g(x_0)$ dans la base $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ (justifier que c'est une base). Calculer les coordonnées $g(f^k(x_0))$.

(c) En déduire que $g = a_0 Id_E + a_1 f + \cdots a_{n-1} f^{n-1}$ et conclure.

Solution **23.** .

1. *En général la somme de deux endomorphismes nilpotents n'est pas nilpotent, ainsi que le montre l'exemple suivant : soit f et g canoniquement associés aux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A^T$.*
Si f et g commutent, on peut appliquer la formule du biôme de Newton.
$$(f+g)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^i \circ g^{k-i}.$$
Si $f^p = 0$, alors pour $i \in [\![p, n]\!]$, $f^i = 0$.
Et si $f^q = 0$, alors $0 \leq i \leq p-1$, on voudrait $g^{k-i} = 0$. Pour cela, il suffit que $k - i \geq q$.
Comme i vaut au plus $p-1$, on veut $k - (p-1) \geq q$, soit $k \geq p + q - 1$. On a donc montrer que $(f+g)^{p+q-1} = 0$.
2. *comme $f^{q-1} \neq 0$, il existe $x_0 \in E$, tel que $f^{q-1}(x_0) \neq 0$*
3. *S'il existe une combinaison linéaire $\alpha_l f^l(x_0) + \cdots + \alpha_{q-1} f^{q-1}(x_0) = 0$ avec $\alpha_p \neq 0$, alors en composant par f^{q-1-l}, on obtient $\alpha_l f^{q-1}(x_0) = 0$. Comme $f(x_0) \neq 0$, on a nécessairement $\alpha_l = 0$, ce qui contredit $\alpha_l \neq 0$. On en déduit que la famille $(x_0, f(x_0, \cdots, f^{q-1}(x_0))$ est libre.*
4. *Une famille libre a au plus n éléements, donc $q \leq n$. Et $f^n = f^{n-q} \circ f^q = 0$.*
5. *La forumule de Bernoulli $Id - f)(Id + f - f^2 + \cdots + (-1)^{q-1} f^{q-1}) = Id - f^q = Id$ montre que $I_n + f$ est inversible et on connaît son inverse.*
   (a) *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f^k et f commutent : $f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f$. D'où le résultat.*

(b)-(c) *De plus, si g commute avec f, $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ étant une base on peut écrire*
$$g(x_0) = \alpha_0 x_0 + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0)$$
et pour tout vecteur de la base $f^i(x_0)$, on a
$$g(f^i(x_0)) = f^i(g(x_0)) = \alpha_0 f^i(x_0) + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1+i}(x_0)$$
donc g coïncide sur une base avec $\alpha_0 Id + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$; ces deux applications sont égales et le commutant est comme annoncé.

Exercice 24. * Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E. Montrer que $\operatorname{rg} f^4 = \operatorname{rg} f^3$.

Solution **24.** . *On sait que la suite des images de f^k est décroissante et que si on a égalité à partir d'un certain rang, alors la suite se stabilise.*
Si $Im f = E$, alors la suite des images est constante, égale à E. Donc la propriété est vraie.
On suppose désormais que $f \neq 0$ et on va procéder par l'absurde : Supposons que $\operatorname{rg} f^4 < \operatorname{rg} f^3$. Alors la suite $Im f \subset \operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f^3 \subset \operatorname{Im} f^4$ est strictement décroissante. Par hypothèse, $rg f \leq 2$, puis $rg f^3 \leq 0$ et enfin f^4 serait de rang négatif, ce qui est absurde. Donc la suite des images se stabilise avant, on a nécessairement $\operatorname{rg} f^4 = \operatorname{rg} f^3$.
De même, si E est de dimension n, alors $rg f^n = \operatorname{rg} f^{n+1}$.

Espaces vectoriels de dimension finie

(Solutions)