

Colle 10 Séries entières

AUTRET Corentin

Exercice 1. Soient $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$ et $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$

1. Déterminer les domaines de définition de f et de g .
2. Donner des équivalents de f et de g en 0^+ .

Solution 1.

1. La fonction f est impaire et g est paire. En 0, le terme général n'est pas défini. Pour $x > 0$, $\frac{1}{\text{sh}(nx)} \sim_{n \rightarrow +\infty} \exp(-nx)$ terme général d'une série "géométrique" convergente. Donc f est définie sur \mathbb{R}^* . Idem pour g .

2. Pour tous $x > 0$ et $n \geq 2$, on a

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{\text{sh}(xt)} \leq \frac{1}{\text{sh}(nx)} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{\text{sh}(xt)}$$

En sommant

$$\frac{1}{\text{sh}(x)} + \int_2^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(xt)} dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(nx)} \leq \frac{1}{\text{sh}(x)} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(xt)} dt$$

On a $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{sh}(xt)} = \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{\text{sh}(t)} \sim_0 \frac{-\ln(x)}{x}$ car une primitive de $\frac{1}{\text{sh}(t)}$ est $\ln|\text{th}(x/2)|$ qui est équivalent en 0 à $\ln x$.

Pour le terme de gauche $\frac{1}{\text{sh}(x)} = o\left(-\frac{\ln x}{x}\right)$, et on montre de même que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{sh}(xt)} = \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{\text{sh}(t)} \sim_0 \frac{-\ln(x)}{x}.$$

Par encadrement, $f \sim_0 -\frac{\ln x}{x}$.

Pour $x > 0$, on a $x^2 g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{\text{sh}^2(nx)}$. Or pour $x > 0$, $\text{sh} x \geq x$, donc $\left| \frac{x^2}{\text{sh}^2(nx)} \right| \leq \frac{1}{n^2}$. La série

est donc normalement convergente et $\frac{x^2}{\text{sh}^2(nx)} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 g(x) =$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Finalement, $g(x) \sim_0 \frac{\pi^2}{6x^2}$.

FARDEAU Max

Exercice 2. Soit $I =]1, +\infty[$. Pour $x \in I$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}.$$

1. Vérifier que f est définie sur I .
2. Montrer que f est continue sur I .
3. Montrer que f est de classe C^1 sur I .
4. Expliquer succinctement pourquoi f est C^∞ sur I .
5. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

Solution 2.

1. Posons $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$. On a, si $x > 1$,

$$0 \leq f_n(x) \leq \left(\frac{1}{x}\right)^n,$$

et la série géométrique de terme général x^{-n} converge, donc, d'après le critère de comparaison, la série de terme général $f_n(x)$ également. Il en résulte que f est définie sur I .

2. Soit $a > 1$. Si $x \geq a$, on a

$$0 \leq f_n(x) \leq \left(\frac{1}{a}\right)^n,$$

La série $f(x)$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$. On en déduit que f est continue sur $[a, +\infty[$. Comme ceci est vrai quel que soit $a > 1$, il en résulte que f est continue sur $]1, +\infty[$.

3. Les fonctions f_n sont de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, et

$$f'_n(x) = -\frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}.$$

On a donc

$$|f'_n(x)| = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} = \left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2 \frac{n}{x^{n+1}}.$$

Soit $a > 1$. Si $x \geq a$, on a

$$\frac{x^n}{1+x^n} \leq 1 \text{ et } \frac{n}{x^{n+1}} \leq \frac{n}{a^{n+1}},$$

donc

$$|f'_n(x)| \leq \frac{n}{a^{n+1}} = a_n,$$

Mais

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \frac{1}{a},$$

et cette suite tend vers $1/a < 1$. Il résulte du critère de d'Alembert que la série de terme général a_n converge, donc que la série de terme général $f'_n(x)$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$. Il résulte de b) et c) que f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$. Comme ceci est vrai quel que soit $a > 1$, il en résulte que f est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$.

4. On peut montrer par récurrence que

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{P_{n,k}(x)}{(1+x^n)^{k+1}},$$

où

$$P_{n,k}(x) = \sum_{j=1}^k Q_{j,k}(n)x^{jn-k},$$

où les $Q_{j,k}(n)$ sont des polynômes en n .

Alors

$$\begin{aligned} |f_n^{(k)}(x)| &\leq \sum_{j=1}^k |Q_{j,k}(n)| \frac{x^{jn-k}}{(1+x^n)^{k+1}} \\ &\leq \sum_{j=1}^k |Q_{j,k}(n)| \left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^{k+1} \frac{1}{x^{n(k+1-j)+k}}. \end{aligned}$$

Alors, si $x \geq a$, on obtient

$$|f_n^{(k)}(x)| \leq \sum_{j=1}^k \frac{|Q_{j,k}(n)|}{a^{n(k+1-j)+k}}.$$

Le membre de droite est alors une somme finie de termes, qui sont chacun le terme général d'une série convergente d'après le critère de d'Alembert. On conclut comme dans c).

5. Si $x > 1$, on a $1+x^n \leq 2x^n$, et

$$f_n(x) \geq \frac{1}{2x^n},$$

donc

$$f(x) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2x^n} = \frac{1}{2(1-1/x)} = \frac{x}{2(x-1)}.$$

Quand x tend vers 1^+ , le membre de droite tend vers $+\infty$, donc celui de gauche également.

GUILLET Louca

Exercice 3. Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ et $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Déterminer le domaine, D de définition de g et prouver que g est de classe C^∞ sur D .
2. Montrer que la quantité : $xg(x) - g(x+1)$ est constante sur D .
3. Donner un équivalent de $g(x)$ en $+\infty$ et en 0^+ .
4. Tracer la courbe représentative de g sur $]0, +\infty[$.
5. Montrer que, pour tout $x > 0$, e.g(x) = $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1) \cdots (x+n)}$.

Solution 3.

1. Les fonctions u_n sont définies sur $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$. De plus, pour x fixé, la suite $|u_n(x)|$ est décroissante dès que $n + x > 0$ et tend vers 0. Le critère spécial des séries alternées, nous dit que la fonction g est alors bien définie.

Les fonctions u_n sont de classe \mathcal{C}^∞ . Soit a fixé, $n > \lfloor (-a) \rfloor + 2$, donc $n + a \geq 1$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \geq a$,

$$u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{n+k}}{n!} \times \frac{k!}{(x+n)^{n+k}} \Rightarrow |u_n(x)| \leq \frac{k!}{n!}.$$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \geq \lfloor (-a) \rfloor + 2} u^{(k)}$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$ et on ajoute les premiers termes (en nombre fini) qui sont de classe \mathcal{C}^∞ .

2. On a pour $n \geq 1$

$$xu_n(x) - u_{n-1}(x+1) = (-1)^n \frac{x+n}{n!(x+n)} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

$$\text{Donc } 1 + \sum_{n \geq 1} xu_n(x) - u_{n-1}(x+1) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}.$$

3. Comme $|xu_n(x)| \leq \frac{1}{n!}$, la série $\sum_n xu_n(x)$ est normalement convergente sur D . Le théorème de la

double limite montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xg(x) = e^{-1}$ et donc $g \sim_{+\infty} \frac{1}{ex}$.

On remarque que $g(1) = 1 - e^{-1}$ et g continue en 1. L'égalité $xg(x) - g(x+1) = e^{-1}$ montre alors que $xg \sim_0 1$.

4. On calcule

$$\frac{1}{x(x+1) \cdots (x+n)} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \frac{1}{x+k}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1) \cdots (x+n)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \frac{1}{x+k} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)! k!(x+k)} \right) \\ &\stackrel{\text{Cauchy}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(x+k)} = e \times g(x). \end{aligned}$$