D.M. n° 7

L'exercice est extrait de CCP - MP - 2005 et contient une preuve du théorème d'Abel radial : essayez de me le rendre. Les plus téméraires pourront se lancer ensuite dans le problème X ESPCI 2005 PC qui mêle produits scalaires et séries entières. Ne me le rendez pas mais aidez-vous du corrigé, déjà en ligne.

Exercice

Notations

— Dans tout le problème, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x ait pour rayon de convergence 1.

— On note f, la somme de cette série entière sur l'intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

— On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les deux propriétés suivantes :

$(\mathcal{P}_1)$: la série numérique $\sum a_n$ converge.

$(\mathcal{P}_2)$: la fonction f admet une limite finie, notée $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Objectif On cherche à prouver le **théorème d'Abel radial** qui affirme que, si la série numérique $\sum a_n$ converge, alors $f(x)$ admet une limite finie égale à $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Généralités

1) En utilisant les développements en série entière usuels, donner dans chacun des cas suivants, en le justifiant, un exemple de suite (a_n) telle que :

a) (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

b) (a_n) ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$.

c) (a_n) ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$.

d) la série entière $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.

2) On suppose que la série numérique $\sum a_n$ est absolument convergente. Montrer alors que la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

3) Exemple
Déduire de la question précédente la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Preuve du théorème d'Abel radial

4) On suppose dans cette question que la série numérique $\sum a_n$ converge et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [0,1], \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

a) Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$, $R_n(x)$ est bien défini. Puis, pour tout $x \in [0,1]$, comparer $R_n(x)$ et la somme :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p}$$

b) En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$, $R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$.

c) Soit ε, un réel strictement positif. Justifier l'existence d'un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad |r_{n+p}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a :

$$\forall x \in [0,1[, \quad |R_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

d) Conclure que la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

5) Que peut-on dire de la série $\sum a_n$ si $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$?

Réciproque du théorème d'Abel radial

6) Justifier que la réciproque du théorème d'Abel radialest fausse. (*On pourra utiliser la question 1.*)

On cherche à ajouter une condition $(\mathcal{Q})$ à la condition $(\mathcal{P}_2)$ de sorte que si (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{Q})$, alors elle vérifie $(\mathcal{P}_1)$.

7) On prend pour $(\mathcal{Q})$ la propriété : pour tout entier naturel n, $a_n \geqslant 0$.
Montrer que si (a_n) vérifie les propriétés $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{Q})$, alors elle vérifie la propriété $(\mathcal{P}_1)$.
(*On pourra montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \leqslant \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.)

N.B. *Si on prenait pour* $(\mathcal{Q})$ *la propriété : la suite* (a_n) *vérifie* $a_n = O(\frac{1}{n})$ *lorsque* $n \to +\infty$, *on obtiendrait le :*

Théorème de Littlewood — Si la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $a_n = O(\frac{1}{n})$, alors la série $\sum a_n$ converge.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2005 **FILIÈRE PC**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Polynômes orthogonaux et équations différentielles

Première partie

Dans cette partie on désigne par E un espace préhilbertien réel, par $(\ |\ )$ son produit scalaire et par $\|\ \|$ la norme correspondante. On note $F^{\perp}$ le sous-espace vectoriel orthogonal d'une partie F de E.

1. Dans cette question on suppose E de dimension finie, on se donne un sous-espace vectoriel F de E, un vecteur v de E n'appartenant pas à F, et un nombre réel $\alpha > 0$. On note π le projecteur orthogonal $E \to F$.

Construire un élément u de F et un réel λ tels que l'élément $u + \lambda v$ soit orthogonal à F et satisfasse les deux conditions suivantes :

$$(u + \lambda v|v) > 0 \ , \ \|u + \lambda v\| = \alpha \ .$$

Démontrer l'unicité du couple (u, λ) et comparer $u + \lambda v$ avec la projection orthogonale de v sur $F^{\perp}$.

2. Soit n un entier, $n \geq 1$. Soit $(v_0, v_1, \ldots , v_n)$ une famille libre de vecteurs de E et soit $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots , \alpha_n)$ une famille de nombres réels strictement positifs. Pour tout p, $0 \leq p \leq n$, on désigne par E_p le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(v_0, v_1, \ldots , v_p)$. Montrer qu'il existe une unique base $(w_0, w_1, \ldots , w_n)$ de E_n vérifiant les conditions suivantes : $w_0 \in E_0$; pour tout p, $1 \leq p \leq n, w_p \in E_p \cap E_{p-1}^{\perp}$; pour tout p, $0 \leq p \leq n, (w_p|v_p) > 0$ et $\|w_p\| = \alpha_p$.

Deuxième partie

Dans cette partie on désigne par $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$ non réduit à un point, par $\mathcal{C}([a, b])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[a, b]$, par E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([a, b])$ formé des restrictions de fonctions polynomiales, et par E_n celui des restrictions de fonctions polynomiales de degré $\leq n$. On se donne une forme linéaire φ sur $\mathcal{C}([a, b])$ telle que $\varphi(f)$ soit positif ou nul si f est positive ou nulle, et strictement positif si de plus f n'est pas identiquement nulle. On note encore $(\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ une suite de nombres réels strictement positifs.

3. Démontrer les assertions suivantes :

a) La formule $(f|g) = \varphi(fg)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b)]$.

b) Il existe une unique suite de polynômes $(P_0, P_1, \dots)$ de E satisfaisant les conditions suivantes :

- P_n appartient à E_n et le coefficient de x^n dans P_n, qu'on notera k_n, est strictement positif ;
- $\varphi(P_m P_n) = 0$ si $m \neq n$;
- $\varphi(P_n^2) = \alpha_n^2$.

4.a) Montrer qu'il existe, pour tout $n \geq 2$, des réels A_n, B_n, C_n, tels que l'on ait

$$P_n(x) = (A_n x + B_n) P_{n-1}(x) + C_n P_{n-2}(x) \ .$$

b) Exprimer A_n en fonction de k_n et k_{n-1}, puis C_n en fonction de $k_n, k_{n-1}, k_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}$.

5. On se propose ici de démontrer que, pour $n \geq 1$, tous les zéros de P_n sont réels, simples et contenus dans l'intervalle ouvert $]a, b[$. Pour cela on examinera les deux possibilités suivantes :

a) Il n'existe aucun zéro de P_n, contenu dans $]a, b[$, de multiplicité impaire ; dans ce cas, on calculera $\varphi(P_n)$;

b) Il existe de tels zéros, que l'on note $a_1, \dots, a_r$ (chacun étant compté une seule fois) ; dans ce cas, on calculera $\varphi(Q_n)$ où $Q_n(x) = P_n(x)(x - a_1) \dots (x - a_r)$.

6. Dans cette question on fixe un entier $n \geq 1$; on note $a_1, \dots, a_n$ les zéros de P_n ; pour tout G de E_{2n-1}, on écrit $G = Q\, P_n + R$ la division euclidienne de G par P_n.

a) Vérifier que Q et R appartiennent à E_{n-1}.

b) On définit des polynômes $L_i, i = 1, \dots, n$, par

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j} \ .$$

Vérifier que l'on a

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} R(a_i)L_i(x) \ .$$

c) Déterminer des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que l'on ait, pour tout G de E_{2n-1} :

$$\varphi(G) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G(a_i) \ .$$

d) Quel est le signe de λ_i ?

Troisième partie

Dans cette partie on prend $[a,b] = [-1,1], \alpha_n = 1$ pour tout $n \geq 0$, et $\varphi(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ pour tout f de $\mathcal{C}([-1,1])$. On considère les fonctions F_n définies par $F_0(x) = 1$ et pour $n \geq 1$,

$$F_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\Big((x^2-1)^n\Big) \ .$$

7. Préciser le degré de F_n et calculer $F_n(1), F_n'(1), F_n(-1), F_n'(-1)$. [On pourra utiliser la formule de Leibniz donnant $\frac{d^n}{dx^n}\Big((x+1)^n(x-1)^n\Big)$].

8. Montrer que F_n est proportionnel au polynôme P_n introduit à la question **3.b)**. [On ne demande pas de préciser le coefficient de proportionnalité].

On désigne par $\mathcal{C}^2(]-1,1[)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles deux fois continûment dérivables sur $]-1,1[$ et par T l'application linéaire de $\mathcal{C}^2(]-1,1[)$ dans $\mathcal{C}(]-1,1[)$ définie par

$$T(f)(x) = \frac{d}{dx}\Big((x^2-1)\frac{df}{dx}\Big) \ .$$

9. Vérifier que $T(F_n)$ est proportionnel à F_n.

10. Déterminer les vecteurs propres et valeurs propres de l'endomorphisme de E_n, restriction de T à E_n.

11. On fixe un nombre réel γ et on s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle

$$T(f) - \gamma f = 0 \tag{1}$$

qui sont développables en séries entières de la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$.

a) Écrire une relation de récurrence entre c_k et c_{k+2}.

b) Étudier la convergence des deux séries entières, paire et impaire : $\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p}x^{2p}$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p+1}x^{2p+1}$. Dire dans quels cas ce sont des polynômes et reconnaître ces polynômes.

c) Décrire l'espace des solutions de (1) dans $\mathcal{C}^2(]-1,1[)$.

d) Que se passe-t-il si l'on remplace l'intervalle ouvert $]-1,1[$ par l'intervalle fermé $[-1,1]$?

* *
*