Séries entières

1 Généralités

Exercice 1. ♡ Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_n \frac{n!}{(2n)!}x^n$	**2.** $\displaystyle\sum_n \ln n x^n$	**3.** $\displaystyle\sum_n \frac{\sqrt{n}x^{2n}}{2^n+1}$
4. $\displaystyle\sum_n \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n.2^n}$	**5.** $\displaystyle\sum_n (2+ni)^n z^n$	**6.** $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}z^n$
7. $\displaystyle\sum_n a^{\sqrt{n}}z^n,\ a>0$	**8.** $\displaystyle\sum_n z^{n!}$	**9.** $\displaystyle\sum_n n^{\ln n}z^n$

Exercice 2. ♡**(Produit de hadamard)* Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif ρ_1 et ρ_2. Montrer que le rayon de convergence R de la série $\sum_n a_n b_n z^n$ vérifie $R \geq \rho_1\rho_2$. A-t-on toujours égalité ?

Exercice 3. ♡♡* Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
2. Etudier la convergence en $-R$ et en R.
3. (a) Soit $M>0$. Montrer qu'il existe un entier $N\geq 1$ et un réel $\delta>0$ tel que, pour tout $x\in]1-\delta,1[$, alors
$$\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \geq M.$$
   (b) En déduire la limite de $f(x)$ quand $x\to 1^-$.
4. (a) On considère la série entière
$$g : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right] x^n.$$
   Démontrer que cette série converge normalement sur $[0,1]$.
   (b) En déduire que $\lim_{x\to 1^-}(1-x)f(x) = 0$.
5. Reprendre les questions précédentes si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence 1 telle que la suite (a_n) est décroissante, tend vers 0 et $\sum a_n$ diverge.

Exercice 4. ♡** Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et soit $r<R$.

1. Montrer que, pour tout entier k, la série de fonctions $\theta \mapsto \sum_n a_n r^n e^{i(n-k)\theta}$ converge normalement sur $[0,2\pi]$.
2. En déduire que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a
$$2\pi r^k a_k = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta.$$
3. Application : on suppose que $R=+\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Exercice 5. ***(*Le théorème taubérien faible*)
Si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série entiere de rayon de convergence 1 telle que

$$\begin{cases} a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \text{et} \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = S \text{ existe} \end{cases}$$

alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et $\sum_{n\geq 0} a_n = S$.

Exercice 6. *

1. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1-e^{-t^4}}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. Soit f la somme de la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{4n-1}}{n!(4n-1)}$. Montrer que f admet une limite en $+\infty$.

2 Calcul de sommes

Exercice 7. ♡ Calculer la somme pour tout complexe z de la série entière :

$$S(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1+n+n^2+n^3}{n!} z^n$$

Exercice 8. * Déterminer le rayon de convergence et calculer pour $x \in [-R, R]$ la somme

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

Exercice 9. * On considère la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Quel est son rayon de convergence, que l'on notera R ? Y-a-t-il convergence aux bornes de l'intervalle de définition ?
2. Sur quel intervalle la fonction f est-elle *a priori* continue ? Démontrer qu'elle est en réalité continue sur $[-R, R]$.
3. Exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de la série dérivée sur $]-R, R[$. En déduire une expression de f sur $]-R, R[$.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

Exercice 10. * On considère la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1. Déterminer l'intervalle de convergence de f.
2. Démontrer que f est continue sur son intervalle de convergence.
3. Exprimer f', puis f, à l'aide de fonctions usuelles sur l'intervalle $]-1, 1[$.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

3 Développement en séries entières

Exercice 11. ♡* Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

et préciser le rayon de convergence R.

Exercice 12. * Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

et préciser le rayon de convergence R.

Exercice 13. * Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left(1 + x + x^2\right)$$

et préciser le rayon de convergence R.

Exercice 14. ♡** Montrer que la fonction $\dfrac{1}{1-x}\exp\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ est développable en série entière en 0 et calculer son développement.

Exercice 15. ** Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$$

et préciser le rayon de convergence R.

4 Équation différentielles

Exercice 16. ♡* Déterminer toutes les fonctions développables en série entière au voisinage de 0 qui sont solution de l'équation différentielle

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0.$$

Exercice 17. ** Soit l'équation différentielle

$$2xy'' - y' + x^2 y = 0.$$

1. Trouver les solutions développables en série entière en 0. On les exprimera à l'aide de fonctions classiques.
2. A l'aide d'un changement de variables qui dervrait apparaître comme raisonnable, résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
3. En déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.

5 Séries génératrices

Exercice 18. ♡* Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}.$$

On suppose que la série entière $f(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif $r > 0$.

1. Démontrer que, pout tout $x \in]-r, -r[$, on a $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$.

2. En déduire qu'il existe $\rho > 0$ tel que $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ pour tout $x \in]-\rho, \rho[$, $x \neq 0$.
3. En développant en série entière la fonction précédente, calculer u_n en fonction de n.

Exercice 19. ♡♡* Montrer que le nombre de solutions $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ de l'équation $x + 2y + 3z = n$ est

$$p(n) = \frac{(n+1)(n+5)}{12} + \frac{17}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{2}{9}\cos\frac{2\pi}{3}$$

Exercice 20. *** Pour $n \geq 0$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On appelle B_n le nombre de Bell.
Pour $n = 0$, $B_0 = 1$, car il n'existe qui n'admet que la partition vide : la partition vide n'ayant pas déléments, tout élément est bien non vide !

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$
2. En déduire que $B_n \leq n!$ puis que la série génératrice de la suite $(\dfrac{B_n}{n!})$:
$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$
a un rayon de convergence $R \geq 1$: c'est-à-dire converge pour $|z| < 1$.
3. Montrer que φ' s'écrit comme le produit de Cauchy de $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ avec $\varphi(z)$.
4. En déduire que $\varphi(z) = \dfrac{1}{e} e^{e^z}$.
5. Calculer le développement en série entière de e^{e^z} en 0 puis en déduire la formule de Dobinski
$$\forall k \in \mathbb{N},\ B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$$
Vous devrez intervertir une double somme avec précaution !
6. En utilisant l'exercice de la feuille précédente sur le calcul du nombre de surjections, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \sum_{i=0}^{n} \left[\left(\sum_{j=0}^{n-i} \frac{(-1)^j}{j!} \right) \frac{i^n}{i!} \right]$$

Séries entières

(Solutions)

Solution 1. 1. Posons $a_n = \frac{n!}{(2n)!}$. Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4n+2} \to 0.$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est $+\infty$.

2. On sait que $(\ln n R^n)$ est borné si et seulement $|R| < 1$. Ainsi, le rayon de convergence vaut 1.
3. Pour $R > 0$, on a

$$\frac{\sqrt{n}R^{2n}}{2^n+1} \sim_{+\infty} \sqrt{n}\left(\frac{R^2}{2}\right)^n.$$

Ceci est borné si et seulement si $\frac{R^2}{2} < 1$. Le rayon de convergence est donc $\sqrt{2}$.

4. Posons $u_n = \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n.2^n}$. Alors

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n|1+i||z|^3}{2(n+1)} \to \frac{\sqrt{2}|z|^3}{2} = \frac{|z|^3}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi, si $|z|^3 < \sqrt{2}$, la série de terme général $|u_n|$ est convergente d'après le critère de d'Alembert, alors qu'elle est divergente si $|z|^3 > \sqrt{2}$. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière est $\sqrt[6]{2}$.

5. On remarque que

$$(n-2)|z|^n \leq |2+ni||z^n| \leq (2+n)|z|^n.$$

Ainsi, la série converge pour $|z| > 1$ et diverge pour $|z| < 1$. Son rayon de convergence est donc 1.

6. Notant $u_n = \frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}z^n$, on applique la règle de d'Alembert pour étudier la convergence absolue de cette série. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|}{2n+1} \to 0.$$

La série entière est donc convergente pour toute valeur de z. Son rayon de convergence est donc $+\infty$.

7. On applique à nouveau la règle de d'Alembert à $u_n = a^{\sqrt{n}}|z|^n$. On obtient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = |z|a^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}.$$

Or,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\big((1+1/n)^{1/2} - 1\big) = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} - 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to 0.$$

Ainsi, on obtient que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to |z|a^0 = |z|.$$

On en déduit que la série des modules converge absolument pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$. Le rayon de convergence de la série entière est donc 1.

8. Pour $|z| < 1$, on remarque que $|z|^{n!} \leq |z|^n$ et donc la série est convergente. Pour $|z| \geq 1$, le terme général de la série ne tend pas vers 0 et la série est donc grossièrement divergente. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière est 1.

9. Pour $u_n = n^{\ln n}|z|^n$, on étudie la convergence en appliquant la règle de Cauchy :
$$\sqrt[n]{u_n} = n^{\ln n/n}|z| = \exp\big((\ln n \times \ln n)/n\big)|z| \to |z|.$$
La série est donc convergente pour $|z| < 1$ et divergente pour $|z| > 1$. Son rayon de convergence vaut 1.

Solution 2. Soit $0 \leq r < \rho_1\rho_2$. Alors il existe $r_1 < \rho_1$ et $r_2 < \rho_2$ tel que $r = r_1r_2$. Les suites $(a_nr_1^n)$ et $(b_nr_2^n)$ sont bornées. Il en est de même de la suite $(a_nb_nr_1^nr_2^n)$, c'est-à-dire de la suite $(a_nb_nr^n)$. Comme ceci est vrai pour tout $r < \rho_1\rho_2$, le rayon de convergence recherché est au moins égal à $\rho_1\rho_2$. On n'a pas toujours égalité. En effet, si la première série est $\sum_n z^{2n}$ et la deuxième série est $\sum_n z^{2n+1}$, alors leur produit de Hadamard est la série nulle, qui est de rayon de convergence égal à $+\infty$, alors que dans ce cas $\rho_1\rho_2 = 1 \times 1 = 1$.

Solution 3.

1. Puisque $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, on démontre par exemple par le critère de d'Alembert que le rayon de convergence vaut 1.
2. Par croissance de la fonction sinus entre 0 et $\pi/2$, la suite $\big(\sin(1/\sqrt{n})\big)$ est décroissante, et positive. D'après le critère des séries alternées, la série converge en -1. En 1, la série $\sum_n \sin(1/\sqrt{n})$ est divergente, par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum_n 1/\sqrt{n}$ (on compare bien des séries à termes positifs).
3. (a) La série $\sum_n \sin(1/\sqrt{n})$, qui est à termes positifs, est divergente. Il existe donc un entier $N \geq 1$ tel que
$$\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq M + 1.$$
De plus, cet entier N étant fixé, la fonction $h : x \mapsto \sum_{n=1}^{N} \sin(1/\sqrt{n})x^n$ est continue en 1. Ceci donne l'existence de $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1]$,
$$h(x) \geq h(1) - 1.$$
Ceci est exactement le résultat voulu.

   (b) Puisqu'on a une série à termes positifs, la série majore toutes ses sommes partielles. Ainsi, pour tout $M > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$,
$$f(x) \geq M.$$
Ceci signifie exactement que f tend vers $+\infty$ en 1^-.
4. (a) Il est clair que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a
$$\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x^n\right| \leq \left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right|.$$
On peut remarquer que l'on a une somme téléscopique convergente ou ou, par exemple, d'après l'inégalité des accroissements finis,
$$\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right| \leq \frac{C}{n^{3/2}}.$$
La série (numérique) de terme général $n^{-3/2}$ étant convergente, ceci prouve la convergence normale de la série définissant g sur $[0, 1]$.

   (b) Un calcul aisé montre que
$$(1-x)f(x) = \sin(1)x + g(x).$$
Or, g étant continue en 1, on trouve
$$\lim_{x\to 1}(1-x)f(x) = \sin(1) + g(1) = \sin(1) + \sum_{n=2}^{+\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right] = 0.$$

Solution 4.

1. Puisque $r < R$, il résulte du lemme d'Abel que la série $\sum_n |a_n| r^n$ est convergente.
   Puisque $|a_n r^n e^{i(n-k)\theta}| = |a_n| r^n$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on en déduit la convergence normale de la série demandée sur $[0, 2\pi]$.
2. On a
$$f(re^{i\theta})e^{-ik\theta} = \sum_n a_n r^n e^{i(n-k)\theta}.$$
   Puisque la série converge normalement, donc uniformément sur $[0, 2\pi]$, on peut inverser l'intégration et la sommation et on trouve
$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta} d\theta = \sum_n a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta.$$
   La dernière intégrale est égale à 0 si $k \neq n$, et à 2π sinon. On en conclut que
$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta} d\theta = 2\pi a_k r^k.$$
3. Pour $k \geq 1$, on a
$$a_k = \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta} d\theta.$$
   Soit $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors on a
$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} M d\theta = \frac{M}{r^k}.$$
   Faisant tendre r vers $+\infty$, on trouve $a_k = 0$ pour $k \geq 1$, ce qui entraîne que f est constante.

Solution 5. Pour tout $N \geq 0$, on pose $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ alors pour tout $x \in]0, 1[$ et tout $N \geq 0$, on a
$$S_N - f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n (1 - x^n) - \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$
or on a pour $0 < x < 1$
$$1 - x^n = (1 - x)\left(1 + x + \cdots + x^{n-1}\right) \leq n(1 - x)$$
d'où
$$|S_N - f(x)| \leq \sum_{n=0}^{N} n |a_n| (1 - x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{n}{N} |a_n| x^n.$$
Puisque la suite $(ka_k)_k$ tend vers 0 , on peut en considérer un majorant M, on obtient
$$|S_N - f(x)| \leq NM(1 - x) + \frac{1}{N} \sup_{n>N} n |a_n| \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n \leq NM(1 - x) + \frac{1}{N(1 - x)} \sup_{n>N} n |a_n|.$$
Soit $0 < \varepsilon < 1$, d'après ce qui précède, on a
$$\left|S_N - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right)\right| \leq M\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \sup_{n>N} n |a_n|$$
or la suite $(ka_k)_k$ tend vers 0 donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{n>N_0} n |a_n| < \varepsilon^2$ d'où
$$\forall N \geq N_0, \left|S_N - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right)\right| \leq (M + 1)\varepsilon.$$

Puisque $f(x)$ tend vers S lorsque x tend vers 1^-, il existe $N_1 \geq N_0$ tel que

$$\forall N \geq N_1, \left|S - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right)\right| \leq \varepsilon$$

d'où

$$\forall N \geq N_1, |S - S_N| \leq \left|S - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right)\right| + \left|S_N - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right)\right| \leq (M+2)\varepsilon$$

i.e. S_N tend vers S quand N tend vers l'infini.

Solution 6.

1. On remarque d'abord que la fonction se prolonge par continuité en 0. En effet, au voisinage de 0, on a

$$\frac{1 - e^{-t^4}}{t^2} \sim \frac{-t^4}{t^2} = -t^2$$

et la fonction se prolonge par 0 en 0. Au voisinage de $+\infty$, la fonction est équivalente à $\frac{1}{t^2}$ qui est intégrable car 2>1. La fonction est donc intégrable sur $]0, +\infty[$.

2. La fonction $t \mapsto \dfrac{1 - e^{-t^4}}{t^2}$ est développable en série entière en 0, de rayon de convergence $+\infty$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1 - e^{-t^4}}{t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{4n-2}}{n!}.$$

Par intégration de cette série entière, on trouve

$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{4n-2}}{n!} dt = \int_0^x \frac{1 - e^{-t^4}}{t^2} dt.$$

Ainsi, f admet une limite en $+\infty$ égale à $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-t^4}}{t^2} dt$.

Solution 7.

Solution 1 : On reconnaît le DSE de la fonction exponentielle en écrivant $1 + n + n^2 + n^3 = n(n-1)(n-2) + 4n(n-1) + 3n + 1$ et

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)(n-2) + 4n(n-1) + 3n + 1}{n!} z^n \\ &= \sum_{n \geq 3} \frac{1}{(n-3)!} z^n + 4 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n-2)!} + 3 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} z^n + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n \\ &= (z^3 + 4z^2 + 3z + 1) \exp(z) \end{aligned}$$

et la série est de rayon infini.

Solution 2 : On calcule par récurrence sur k $\varphi_k = \sum_{n \geq 0} \frac{n^k}{n!} x^n$:

On a $\varphi_0(x) = e^x$ et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x\varphi_k'(x) = x \sum_{n \geq 0} \frac{n^{k+1}}{n!} x^{n-1} = \varphi_{k+1}(x)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= e^x \\ \varphi_1(x) &= x\,(e^x)' = xe^x \\ \varphi_2(x) &= x\,(xe^x)' = (x^2 + x)e^x \\ \varphi_3(x) &= x\,((2x+1)e^x)' = (x^3 + 3x^2 + x)e^x \end{aligned}$$

D'où $\varphi(x) = (x^3 + 4x^2 + 3x + 1) \exp(x)$.

Solution 8.

Version 1 : Si $\varphi(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n(n+1)}$, alors $(x\varphi(x))'=\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$ est une série entière de rayon de convergence $R=1$. On en déduit que le rayon de convergence de φ est 1.
De plus, $\forall x\in]-R,R[$, $x\varphi(x)$ est la primitive de $-\ln(1-x)$ qui s'annule en 0 :

$$x\varphi(x)=x-(x-1)\ln(1-x).$$

On en déduit :

$$\forall x\in]-R,R[\backslash\{0\},\ \varphi(x)=1-\frac{x-1}{x}\ln(1-x)\text{ et }\varphi(0)=1.$$

De plus, si $x=R=1$, $\frac{x^n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}\sim\frac{1}{n^2}$, donc la série est normalement convergente sur $[-R,R]$, donc φ est définie et continue sur $[-R,R]$. On en dduit que

$$\varphi(1)=\lim_{x\to 1^-}1-\frac{x-1}{x}\ln(1-x)=1\text{ et }\varphi(-1)=\lim_{x\to -1^+}1-\frac{x-1}{x}\ln(1-x)=1-\ln(2).$$

Version 2 On remarque que $\frac{1}{n}(n+1)\sim\frac{1}{n^2}$, donc le rayon de convergence de la série vaut 1 et la série est normalement convergente sur $[-1,1]$. De plus, pour $n\geq 1$, $|x|<1$ et $x\neq 0$

$$\frac{x^n}{n(n+1)}=\frac{x^n}{n}-\frac{1}{x}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Et donc

$$\varphi(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{x}\left[\left(\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}\right)-x\right]=1-\frac{x-1}{x}\ln(1-x).$$

Puis on calcule les limites en 1^- et en -1^+ comme dans la version 1.

Solution 9.

1. Posons $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}x^{2n+1}$. Alors $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{n(2n+1)x^2}{(n+1)(2n+3)}\to|x|^2$. Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série entière est convergente pour $|x|<1$ et divergente pour $|x|>1$. Son rayon de convergence est donc 1. De plus, pour $x=1$, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$ est (absolument) convergente (on peut aussi prouver qu'elle converge d'après le critère des séries alternées). De même, pour $x=-1$, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{-1}{n(2n+1)}$ est convergente. f est donc définie sur $[-1,1]$.
2. La théorie des séries entières nous dit que f est continue sur son intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire sur $]-1,1[$. Pour prouver la continuité sur $[-1,1]$, on va prouver qu'il y a convergence normale sur tout l'intervalle $[-1,1]$. En effet, pour tout $x\in[-1,1]$, on a

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(2n+1)}\right|\leq\frac{1}{n(2n+1)}$$

   et le membre de droite de l'inégalité est le terme général d'une série numérique convergente (insistons sur le fait qu'il ne dépend pas de x). La série est donc normalement convergente sur $[-1,1]$. Comme chaque fonction $x\mapsto\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(2n+1)}$ est continue sur $[-1,1]$, on en déduit que f est continue sur $[-1,1]$.
3. La série dérivée est, pour $|x|<1$,

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{2n}=\ln(1+x^2).$$

   En effet, pour $x\in]-1,1[$, on a $0\leq x^2<1$ et on est bien dans le domaine de validité du développement en série entière de $\ln(1+u)$. Puisque $f(0)=0$, on en déduit $f(x)=\int_0^x\ln(1+t^2)dt$. On calcule cette intégrale en effectuant une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x 1 \times \ln(1+t^2)dt \\
&= \left[\frac{t}{1+t^2}\right]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}dt \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\left[t-\arctan(t)\right]_0^x \\
&= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x.
\end{aligned}$$

4. L'égalité $f(x) = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x$ n'est valable que pour $x \in]-1,1[$. Mais le membre de droite comme celui de gauche sont continus en 1. Par continuité, l'égalité précédente reste vraie sur $[0,1]$ tout entier. On conclut que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} = f(1) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Solution 10.

1. Le rayon de convergence de la série entière est 1. De plus, puisque

$$\left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right| \leq \frac{C}{n^2}$$

on a aussi convergence en 1 et -1. L'intervalle de convergence est donc $[-1,1]$.

2. Les théorèmes usuels concernant les séries entières ne donnent la continuité que sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$. Si on veut obtenir la continuité sur l'intervalle fermé, il faut aller plus loin ! Pour cela, on va montrer la convergence normale de la série sur l'intervalle $[-1,1]$. En effet, pour tout $x \in [-1,1]$ et tout $n \geq 2$, on a

$$\left|\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}\right| \leq \frac{C}{n^2}$$

et cette dernière série est convergente. Puisque chaque fonction $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$ est continue sur $[-1,1]$, on en déduit la continuité de f sur $[-1,1]$.

3. f est dérivable sur $]-1,1[$ et on a

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1}x^{n-1} = \ln(1+x).$$

Par intégration, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x + C.$$

La constante C se calcule en remarquant que $f(0) = 0 = C$.

4. L'égalité précédente est, a priori, vraie sur $]-1,1[$, mais puisque f et $x \mapsto (1+x)\ln(1+x) - x$ sont continues en 1, elle est aussi vraie en 1. On en déduit

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = f(1) = 2\ln(2) - 1.$$

Solution 11. On calcule $f'(x) = -\dfrac{2x}{1+x^4}$ dont on déduit que f admet un DSE en 0 de rayon de conevrgence $R = 1$ et

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \arctan(x^2) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} \frac{x^{4n+2}}{2n+1}$$

Solution 12. On calcule $f'(x) = -\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{1}{3-x}$.

$$f(x) = \ln 6 - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) \frac{x^n}{n}$$

et le rayon de convergence vaut 2 en prenant la défintion.

Solution 13. On écrit $1 + x + x^2 = \dfrac{1-x^3}{1-x}$. le résultat est alors immédiat.

Solution 14. On connaît le DSE de $\dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} x^n$.

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} \exp\left(\frac{1}{1-x} \right) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!(1-x)^{p+1}} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{(p!)^2 n!} x^n \right) \\ &\overset{Fubini}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{(p!)^2} \right) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

La convergence étant assurée, puisque pour $0 < x < 1$ les séries sont à terme positif.

Solution 15. On calcule

$$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}} = \frac{f(x)}{2\sqrt{1+x^2}}$$

puis

$$f''(x) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+x^2} f'(x) - f(x) \dfrac{x}{1+x^2}}{1+x^2}$$

dont on déduit que f vérifie l'équation différentielle

$$(1+x^2) f''(x) + x f'(x) - \frac{f(x)}{4} = 0$$

avec les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$ On verra que cela détermine la solution de manière unique.

On pose $f(x) = \sum a_n x^n$ et on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) a_n \right] x^n = 0$$

et

$$a_{n+2} = -\frac{(2n+1)(2n-1)}{4(n+2)(n+1)} a_n$$

qui montre déjà que pour les indices paires et imapires le rayon de convergence est 1 donc pour la série complète aussi.
On en déduit par les techniques habituelles

$$a_{2p} = \frac{(-1)^{p+1}}{2^{4p}p}\binom{4p-2}{2p-1} \quad a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)2^{4p+1}}\binom{4p}{2p}$$

Solution 16. On procède par analyse-synthèse. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$. On introduit ce développement dans l'équation :

$$x^2(1-x)\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} - x(1+x)\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0$$

pour tout $x \in]-R, R[$, soit encore

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 1} na_n x^n - \sum_{n\geq 1} na_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0.$$

On réindexe les deuxième et quatrième somme de sorte d'obtenir à l'intérieur le terme x^n :

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n\geq 3}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n - \sum_{n\geq 1} na_n x^n - \sum_{n\geq 2}(n-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

ceci étant identiquement nul sur $]-R, R[$. Sachant qu'une série entière est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on peut identifier. Le terme en x^0 donne $a_0 = 0$, celui en x^1 donne $0 = 0$, celui en x^2 donne $2a_2 - 2a_2 - a_1 + a_2 = 0$, soit $a_2 = a_1$. Pour $n \geq 3$, , on obtient

$$\big(n(n-1) - n + 1\big)a_n + \big(-(n-1)(n-2) - (n-1)\big)a_{n-1} = 0$$

i.e. $a_n = a_{n-1}$ pour tout $n \geq 3$. Toute solution développable en série entière s'écrit donc :

$$y(x) = a\sum_{n\geq 1} x^n = \frac{ax}{1-x},\ a \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement (c'est la partie synthèse du raisonnement), on vérifie aisément, en les introduisant dans l'équation différentielle, que les fonctions $x \mapsto \frac{ax}{1-x}$ sont solution de l'équation.
Une fois cette solution trouvée, on peut alors résoudre complètement l'équation différentielle en utilisant la méthode d'abaissement de l'ordre.

Solution 17.

1. Soit $y(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ une solution de l'équation développable en série entière. Alors, on a

$$2xy'' - y' + x^2 y = -a_1 + 2a_2 x + \sum_{i=2}^{+\infty}\big((i+1)(2i-1)a_{i+1} + a_{i-2}\big)x^i = 0.$$

   Par unicité du développement en série entière, on trouve $a_1 = a_2 = 0$ et la formule de récurrence

$$a_{i+1} = -\frac{1}{(i+1)(2i-1)}a_{i-2}.$$

   On a donc, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0$ et

$$a_{3k} = -\frac{1}{3k(6k-3)}a_{3k-3} = -\frac{1}{9k(2k-1)}a_{3k-3}.$$

   Par récurrence,

$$a_{3k} = \frac{(-1)^k}{9^k k!(2k-1)\times(2k-3)\cdots\times 3\times 1}a_0 = \frac{(-1)^k 2^k k!}{9^k k!(2k)!}a_0 = \frac{(-1)^k 2^k}{9^k(2k)!}a_0.$$

Réciproquement, pour tout a_0 dans $\mathbb{R}$, la série entière

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{9^k (2k)!} x^{3k}$$

a pour rayon de convergence $+\infty$ et est solution de l'équation différentielle.
Si on cherche maintenant à identifier à une fonction classique, le terme $\frac{x^{3k}}{(2k)!}$ nous met sur la voie. Cela ressemble au terme général de $\cos(x)$, ou plutôt de $\cos(x^{3/2})$. Comme ceci n'est défini que pour $x > 0$, il faut aussi considérer $\cosh\left((-x)^{3/2}\right)$ pour $x < 0$. Avec une homothétie pour obtenir $\frac{2^k}{9^k}$, on trouve finalement que

$$y(x) = \begin{cases} a_0 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ a_0 \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

2. La forme de la solution trouvée précédemment nous conduit au changement de variables $t = \frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}$ pour $x > 0$, c'est-à-dire à chercher l'équation différentielle vérifiée par $z(t) = y(x)$. Or,

$$y'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} x^{1/2} z'(t)$$

et

$$y''(x) = \frac{1}{2} x z''(t) + \frac{\sqrt{2}}{4x^{1/2}} z'(t).$$

On trouve donc

$$2xy'' - y' + x^2 y = x^2 z'' + \frac{\sqrt{2}}{2} x^{1/2} z' - \frac{\sqrt{2}}{2} x^{1/2} z' + x^2 z = 0.$$

z vérifie donc l'équation différentielle $z'' + z = 0$, et donc $z = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t)$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Autrement dit, la solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$ est donnée par :

$$y(x) = \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right).$$

Pour résoudre l'équation sur $]-\infty, 0[$, on pose cette fois $t = \frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}$. La fonction $z(t) = y(x)$ vérifie l'équation différentielle $z'' - z = 0$, et donc la solution générale sur $]-\infty, 0[$ est donnée par

$$y(x) = \lambda' \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right) + \mu' \sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right).$$

3. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, on sait qu'il existe des constantes $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbb{R}$ telles que

$$y(x) = \begin{cases} \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right) \text{ pour } x > 0 \\ \lambda' \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) + \mu' \sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) \text{ pour } x < 0. \end{cases}$$

Comme y est continue en 0 et que $\lim_{0^+} y = \lambda$ alors que $\lim_{0^-} y = \lambda'$, on en déduit que $\lambda = \lambda'$. D'autre part, pour $x > 0$, on note $y(x) = \lambda y_1(x) + \mu y_2(x)$. On a

$$y_2''(x) = \left(\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right)\right)'' = -\frac{x}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4x^{1/2}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right).$$

Pour $x \to 0$, ceci tend vers $+\infty$. Or, puisqu'une solution de (E) est de classe C^2, on sait que $y''(x)$ admet une limite (finie) quand x tend vers 0, et que y_1 se prolonge en fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$. En particulier, $\lim_0 y_1''$ existe (et est finie). Puisque $\lim_{0^+} y'' = \lambda \lim_{0^+} y_1'' + \mu \lim_{0^+} y_2''$, ceci ne peut être fini que si $\mu = 0$. De même, on trovue que $\mu' = 0$. Les seules solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont donc celles données par la première question.

Solution 18.

1. On introduit la série entière $f(x)=\sum_{n\geq 0}u_nx^n$. Supposons que son rayon de convergence soit $r>0$. Alors, faisant le produit de Cauchy des deux séries, on a, pour tout $x\in]-r,r[$,
$$f^2(x)=\sum_{n\geq 0}v_nx^n \text{ avec } v_n=\sum_{k=0}^n u_ku_{n-k}=u_{n+1}.$$
Autrement dit, on a
$$f^2(x)=\sum_{n\geq 0}u_{n+1}x^n=\frac{f(x)-f(0)}{x}.$$
Pour chaque $x\in]-r,r[$, $f(x)$ vérifie donc l'équation
$$xf^2(x)-f(x)+1=0.$$
2. Il en résulte que, pour chaque $x\in]-r,r[$, on doit avoir
$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \text{ ou } f(x)=\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}.$$
Or, f doit être continue en 0 avec $f(0)=1$. S'il existe une suite (x_n) tendant vers 0 pour laquelle $f(x_n)=\frac{1+\sqrt{1-4x_n}}{2x_n}$, alors $|f(x_n)|\to+\infty$, ce qui est contradictoire. Donc il existe $\rho>0$ tel que
$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \text{ pour tout } x\in]-\rho,\rho[.$$
3. Réciproquement, soit $f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ si $x\neq 0$, $f(0)=1$. On va prouver que f est développable en série entière au voisinage de 0. En effet, pour tout $x\in]-1/4,1/4[$, on a
$$\sqrt{1-4x}=1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\frac{x^n}{n!}.$$
On en déduit que, pour tout $x\in]-1/4,1/4[$, on a
$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}x^n.$$
Puisque f vérifie $xf^2(x)-f(x)+1=0$, le calcul effectué à la première question (ie le développement en série entière de xf^2-f+1) prouve que, en posant $a_n=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$, $a_0=1$ et $a_{n+1}=\sum_{k=0}^n a_ka_{n-k}$. On en déduit que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a
$$u_n=a_n=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$
Les nombres u_n s'appellent les nombres de Catalan.

Solution 19. Pour $|t|<1$, on effectue les développements en série entière suivants :
$$\frac{1}{1-t}=\sum_{k=0}^{+\infty}t^k,\ \frac{1}{1-t^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}t^{2k} \text{ et } \frac{1}{1-t^3}=\sum_{k=0}^{+\infty}t^{3k}$$
de sorte que On décompose cette fraction en éléments simples
$$\frac{1}{(1-t)\,(1-t^2)\,(1-t^3)}=\frac{1}{6(1-t)^3}+\frac{1}{4(1-t)^2}+\frac{17}{72(1-t)}+\frac{1}{8(1+t)}+\frac{1}{9(1-jt)}+\frac{1}{9\,(1-j^2t)}.$$

En dérivant la série géométrique, il vient.

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)t^k \text{ et } \frac{1}{(1-t)^3} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2}(k+2)(k+1)t^k$$

d'où en remplaçant plus haut

$$\frac{1}{(1-t)\left(1-t^2\right)\left(1-t^3\right)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{12}(k+2)(k+1)+\frac{1}{4}(k+1)+\frac{17}{72}+\frac{(-1)^k}{8}+\frac{1}{9}\left(e^{\frac{21\pi k}{3}}+e^{-\frac{2i\pi k}{3}})\right)t^k.$$

et on a donc, pour tout $k \geq 0, p(k) = \dfrac{(k+1)(k+5)}{12}+\dfrac{17}{72}+\dfrac{(-1)^k}{8}+\dfrac{2}{9}\cos\dfrac{2\pi}{3}$.

Solution 20.

1. Pour tout $0 \leq k \leq n$, on considère E_k l'ensemble des partitions de $\{1, \cdots, n+1\}$ telles que la partie A_{n+1} contenant l'élément $n+1$ est de cardinal $k+1$. Chaque élément de E_k est déterminé par une k-combinaison parmi n donnant les k éléments de $A_{n+1} \setminus \{n+1\}$ puis par une partition de l'ensemble des $n-k$ éléments restants donc B_{n-k}.
   On en déduit
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$
2. On procède par récurrence, il est clair que $B_0 = 1 \leq 0!$. Puis on suppose que la relation est vraie pour tout $0 \leq k \leq n$. la relation plus haut montre que
   $$B_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k! = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!} \leq n!(+1) = (n+1)!$$
   et donc $\dfrac{B_n}{n!} \leq 1$, ce qui montre que le rayon de convergence de φ est ≥ 1.
3. On calcule le produit de Cauchy pour $|z| < 1$ des séries entières
   $$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}z^n \times \sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}z^n &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\frac{B_k}{k!}\right)z^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}B_k\right)\frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_{n+1}}{n!}z^n \\ &= \varphi'(z)\end{aligned}$$
4. La fonction φ est solution de l'équation différentielle
   $$y' = e^z y$$
   et $\varphi(z) = \lambda e^{e^z}$ et comme $\varphi(0) = 1$, on obtent bien $\varphi(z) = \dfrac{1}{e}e^{e^z}$.
5. Pour calculer le développement en série entière de φ on peut calculer la composée :
   $$\varphi(z) = \frac{1}{e}\sum_{n\geq 0}\frac{e^{nz}}{n!} = \frac{1}{e}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{(nz)^k}{k!}\right) = \frac{1}{e}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{n^k}{n!}\right)z^k$$

d'où le résultat, à condition que l'interversion soit licite, mais pour $z \in [0,1]$, les sommes à termes positifs, il n'y a donc pas de problème.
On peut aussi éviter cette double somme en remarquant (facile) que la formule proposée vérifie la relation de récurrence de la question 1/ (on intervertit une somme finie et une somme infinie), mais c'est moins drôle.

6. Une surjection sur un ensemble à p éléments détermine une partitions à p ensembles.