Corrigé du D.S. n$^{\mathrm{o}}$ 6 de mathématiques

Durée : 4 heures.

Cet énoncé contient 3 exercices extraits de problèmes de concours.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 (tiré de CCP Maths PC 2015)**.**

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire S_n qui suit une loi de Poisson de paramètre n : $S_n(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbf{P}(X = k) = e^{-n}\dfrac{n^k}{k!}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

1) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(t) = \frac{e^{-t}t^n}{n!}.$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau des variations de la fonction f_n.

b) Déterminer un équivalent de $f_n(n)$ quand n tend vers ∞.

2) **a)** Rappeler l'espérance $\mathbf{E}(S_n)$ et la variance de la variable aléatoire S_n et déterminer celles de la variable aléatoire $S_n^* = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)e^{-n}\frac{n^k}{k!}$ et en déduire que

$$\mathbf{E}\left(|S_n - n|\right) = 2e^{-n}\frac{n^{n+1}}{n!}.$$

c) Étudier $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(|S_n^*|\right)$.

3) **a)** Rappeler l'hypothèse et l'expression du reste $R_n(a, b)$ de la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + R_n(a, b)$$

pour une fonction f sur un intervalle $[a, b]$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(S_n^* \leq 0) = 1 - \int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt.$$

c) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0) - \mathbf{P}(S_{n+1}^* \leqslant 0) = \int_n^{n+1} e^{-t}\,\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,dt - e^{-n}\,\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

d) En déduire que la suite $(\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbf{G}_{S_n}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire S_n.

a) Montrer que la fonction $\mathbf{G}_{S_n}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $\mathbf{G}_{S_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) En déduire que, pour tout $t > 0$, la variable aléatoire $t^{S_n^*}$ admet une espérance et que :

$$\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}}.$$

c) Étudier, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(t^{S_n^*})$.

---

1) **a)** Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $t \geq 0$, $f_n'(t) = \dfrac{e^{-t}t^{n-1}}{n!}(n-t)$.

t	0		n		$+\infty$
$f_n'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f_n(t)$	0	$\nearrow$	$f_n(n) = \dfrac{e^{-n}n^n}{n!}$	$\searrow$	0

b) Grâce à la formule de Stirling, $f_n(n) \sim \dfrac{e^{-n}n^n}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}$ et, en simplifiant, $f_n(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$.

2) **a)** $E(S_n) = V(S_n) = n$. Par linéarité de l'espérance, $E(S_n^*) = \frac{E(S_n)-n}{\sqrt{n}} = 0$. Et $V(S_n^*) = \frac{V(S_n)}{\sqrt{n}^2} = 1$.

b) On calcule la somme $K = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)e^{-n}\frac{n^k}{k!}$ grâce à un télescope :

$K = ne^{-n}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n}\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}\right) = ne^{-n}\frac{n^n}{n!}$.

$$\mathbf{E}(|S_n - n|) = \sum_{k=0}^{\infty}|k-n|e^{-n}\frac{n^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}(n-k)e^{-n}\frac{n^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)e^{-n}\frac{n^k}{k!} = K + L,$$

Or $L - K = E(S_n - n) = 0$, d'où $K = L$, donc

$$E(|S_n - n|) = 2K = 2e^{-n}\frac{n^{n+1}}{n!}.$$

c) $E(|S_n^*|) = \frac{1}{\sqrt{n}}E(|S_n - n|) = 2\sqrt{n}f_n(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ d'après la question 1b. Donc $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|S_n^*|) = \sqrt{2/\pi}$.

3) **a)** Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur le segment $[a,b]$, alors la formule de Taylor est vérifiée avec $R_n(a,b) = \displaystyle\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $(S_n^* \leq 0) = (S_n \leq n) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n}(S_n = k)$ et cette union est disjointe, d'où $P(S_n^* \leq 0) = P(S_n \leq n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(S_n = k)$, donc : $P(S_n^* \leq 0) = e^{-n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$.

On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $f = \exp$ qui est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b] = [0,n]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = f$ et $f(0) = 1$ donc $e^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} + R_n(0,n)$, où $R_n(0,n) = \displaystyle\int_0^n e^t\frac{(n-t)^n}{n!}dt = \int_0^n \frac{e^{n-u}u^n}{n!}du$ (par le changement de variable $u = n - t$ qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$).

On multiplie l'égalité obtenue par e^{-n} : $1 = e^{-n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} + \int_0^n \frac{e^{-t}t^n}{n!}dt$. D'où

$$P(S_n^* \leq 0) = 1 - \int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt.$$

c) Par suite :

$$\begin{aligned} P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) &= \int_0^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}dt - \int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt \\ &= \int_0^n e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}dt + \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}dt - \int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt. \end{aligned}$$

Dans la première intégrale, on pose $u(t) = \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$ et $v(t) = -e^{-t}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ et $u'(t) = \dfrac{t^n}{n!}$, $v'(t) = e^{-t}$. D'où, en intégrant par parties :

$$P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) = \int_n^{n+1} e^{-t}\,\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}dt - e^{-n}\,\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

d) $P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) = \displaystyle\int_n^{n+1} f_{n+1}(t)dt - f_{n+1}(n)$ et la fonction f_{n+1} est croissante sur $[n; n+1]$ d'après la question 1a. Donc, pour tout $t \in [n; n+1]$, $f_{n+1}(t) \geq f_{n+1}(n)$ et, en intégrant sur $[n; n+1]$: $P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) \geq 0$. La suite $(P(S_n^* \leq 0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante. Par ailleurs, elle est minorée par 0 (car toute probabilité est positive), donc elle converge.

4) a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$: la série $\sum \dfrac{(nt)^k}{k!}$ converge et sa somme vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nt)^k}{k!} = e^{nt}$. D'où $G_{S_n}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^{-n}\,\frac{(nt)^k}{k!}$ est défini et vaut

$$G_{S_n}(t) = e^{n(t-1)}$$

b) Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbf{G}_{S_n}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = k)t^k = \mathbf{E}(t^{S_n})$ d'après le théorème de transfert.

Or $t^{S_n^*} = (t^{1/\sqrt{n}})^{S_n - n} = (t^{1/\sqrt{n}})^{S_n} \times t^{-\sqrt{n}}$. D'où, par linéarité de l'espérance, $t^{S_n^*}$ admet une espérance et

$$\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}}.$$

c) D'après les deux questions précédentes, $\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \dfrac{\exp\left(n(t^{1/\sqrt{n}} - 1)\right)}{t^{\sqrt{n}}}$.

$e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$, où $\varepsilon(u)$ tend vers 0 quand u tend vers 0. D'où $t^{1/\sqrt{n}} = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\ln t\right) = 1 + \dfrac{\ln t}{\sqrt{n}} + \dfrac{(\ln t)^2}{2n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon_n$, où ε_n tend vers 0 quand n tend vers ∞. D'où $n(t^{1/\sqrt{n}} - 1) = \sqrt{n}\ln t + \dfrac{(\ln t)^2}{2} + \varepsilon_n$. Donc $\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \exp\left[\dfrac{(\ln t)^2}{2} + \varepsilon_n\right]$.

Par continuité de la fonction exponentielle, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \exp\left(\frac{(\ln t)^2}{2}\right)$.

Exercice 2 (tiré de Mines-Ponts Maths 2 MPI 2023)**.**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x \,\mathrm{d}t$.

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

2) Étudier le sens de variation de la fonction f.

3) Montrer que la fonction f est strictement positive.

4) Montrer que, pour tout réel $x > -1$,

$$(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2).$$

5) Étudier la limite de $f(x)$ quand le réel x tend vers -1.

6) Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

7) Montrer que $f(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

8) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale généralisée $D_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin t))^n \,\mathrm{d}t$ est convergente.

9) Montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\mathrm{d}t = -\frac{\pi \ln 2}{2}.$$

10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\, \mathrm{d}u.$$

11) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u$ converge et calculer sa valeur.

12) En déduire que

$$D_n \underset{n\to\infty}{\sim} (-1)^n n!$$

13) Soient $x > -1$ et, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$f_n(t) = \frac{(\ln(\sin t))^n}{n!} x^n.$$

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

14) Prouver que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et donner son développement en série entière.

15) En déduire que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

---

1) L'intégrale est impropre en 0 et $(\sin t)^x \underset{x\to 0^+}{\sim} t^x = \dfrac{1}{t^{-x}}$ qui ne change pas de signe. Donc, d'après le critère de Riemann,

$\boxed{\text{l'ensemble de définition de } f \text{ est }]-1, +\infty[}$

2) Soient deux réels x et y dans $]-1, +\infty[$ tels que $x \leq y$. Pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 < \sin t \leq 1$, d'où $x \ln(\sin t) \geq y \ln(\sin t)$ et, par croissance de la fonction exp, $(\sin(t))^x \geq (\sin(t))^y$. Donc, par croissance de l'intégrale, $f(x) \geq f(y)$ et

$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est décroissante}}$

3) Soit $x > -1$. La fonction $g : t \mapsto (\sin(t))^x$ est positive, d'où le réel $f(x)$ aussi par croissance de l'intégrale. Et ce réel n'est pas nul car, par l'absurde : l'intégrale d'une fonction positive et continue est nulle si, et seulement si, cette fonction est nulle. Si le réel $f(x)$ est nul, alors la fonction g aussi car elle est positive et continue. C'est absurde car $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$.

Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement positive}}$

4) Soit $x > -1$. Alors x et $x + 2$ appartiennent à l'ensemble de définition de f. Les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$, on peut donc intégrer par parties : pour tout $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\int_a^{\pi/2} (\sin(t))^{x+1} \sin(t)\, \mathrm{d}t = \left[-(\sin(t))^{x+1} \cos(t)\right]_a^{\pi/2} + \int_a^{\pi/2} (x+1)(\sin(t))^x \cos^2(t)\, \mathrm{d}t$$

De plus

Comme $x+1 > 0$, $\left[-(\sin(t))^{x+1} \cos(t)\right]_a^{\pi/2} \underset{a\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, donc l'intégrale $\int_0^{\pi/2} (x+1)(\sin(t))^x \cos^2(t)\, \mathrm{d}t$ converge et elle est égale à $f(x+2)$. Comme $\cos^2 = 1 - \sin^2$, $f(x+2) = (x+1)\left(\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x\, \mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{x+2}\, \mathrm{d}t\right) = (x+1)f(x) - (x+1)f(x+2)$.

Donc $\boxed{\forall x > -1,\ (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2)}$

5) Par décroissance de la fonction f, $f(2) \leq f(x+2)$ pour tout $x \in]-1, 0]$, d'où $\frac{(x+2)f(2)}{x+1} \leq \frac{(x+2)f(x+2)}{x+1} = f(x)$. Or $\frac{(x+2)f(2)}{x+1} \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} +\infty$ car le réel $f(2)$ est strictement positif d'après la question 3. Donc $\boxed{f(x) \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} +\infty}$

6) Tout entier n appartient à l'ensemble de définition de f, d'où $(n+1)f(n)f(n+1) = (n+2)f(n+1)f(n+2)$ d'après la question 4 en multipliant par $f(n+1)$. Ainsi la suite $((n+1)f(n)f(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Or $f(0) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, d'où $(n+1)f(n)f(n+1) = 1f(0)f(1) = \dfrac{\pi}{2}$ Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f(n)f(n+1) = \dfrac{\pi}{2(n+1)}}$

7) ▷ **question 1f du DM nº 01.**

8) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'intégrale D_n est impropre en 0 et, quand $t \longrightarrow 0^+$, $\sqrt{\sin t}(\ln(\sin t))^n \longrightarrow 0$ par croissances comparées. Et $\sin(t) \sim t$, donc $\sqrt{t}(\ln(\sin t))^n \longrightarrow 0$. D'où $(\ln(\sin t))^n = o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$. Or $\frac{1}{t^{1/2}}$ ne change pas de signe et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{t^{1/2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente d'après le critère de Riemann.

Ainsi $\boxed{\text{l'intégrale } D_n \text{ converge pour tout } n \in \mathbb{N}}$

9) Le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone. Il donne $D_1 = -\displaystyle\int_{\pi/2}^{0} \ln(\sin(\pi/2-u))\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos u)\mathrm{d}u$. Puis, en effectuant le changement de variable $u = 2t$, lui aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone,

$$2D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)\cos(t))\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\ \mathrm{d}u - \frac{\pi \ln 2}{2}.$$

Enfin le changement de variable $u = \pi - t$ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone donne

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))\ \mathrm{d}u = -\int_{\pi/2}^{0} \ln(\sin(\pi - t))\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\ \mathrm{d}t,$$

d'où $2D_1 = \dfrac{2}{2}D_1 - \dfrac{\pi \ln 2}{2}$. Donc $\boxed{D_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t = -\frac{\pi \ln 2}{2}}$

10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction $t \mapsto -\ln(\sin(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante (par composition) de $]0, \pi/2[$ vers $]0, +\infty[$ car $-\ln(\sin(\pi/2)) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^+}(-\ln(\sin(t))) = +\infty$. On effectue alors le changement de variable $u = -\ln(\sin(t))$: $du = \frac{-\cos(t)}{\sin(t)}dt$ et, pour tout $t \in]0, \pi/2[$, $\cos(t) > 0$, d'où $\dfrac{\sin(t)}{-\cos(t)} = -\dfrac{\sin(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} = \dfrac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2u}}} = \dfrac{-1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}$ et

$D_n = \displaystyle\int_{+\infty}^{0} (-u)^n \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}} = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\mathrm{d}u$, donc $\boxed{(-1)^n D_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\ \mathrm{d}u}$

11) ▷ **question 12 de l'exercice du DS nº 3 de MPI*.**

12) On va prouver que $(-1)^n D_n - n! = o(n!)$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}(-1)^n D_n - n! &= \int_0^{+\infty} u^n \left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}} - \frac{1}{\mathrm{e}^u}\right)\ \mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} u^n \left(\frac{\mathrm{e}^u - \sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}{\mathrm{e}^u\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\right)\ \mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\mathrm{e}^u\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}\left(\mathrm{e}^u + \sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}\right)}\ \mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$|(-1)^n D_n - n!| \leq \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\mathrm{e}^u\left(\mathrm{e}^{2u}-1\right)}\ \mathrm{d}u \leq \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\mathrm{e}^u\ (2u)}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^{n-1}\mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u = \frac{(n-1)!}{2}$$

en ayant utilisé l'inégalité de convexité : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^t - 1 \geq t > 0$. Or $(n-1)! = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$, donc $\boxed{D_n \underset{n\to\infty}{\sim} (-1)^n n!}$

13) On sait que la série entière $\sum \frac{u^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$. En posant $u = x\ln(\sin(t))$, la série numérique $\sum f_n(t)$ converge donc pour tout $t \in]0, \pi/2]$. De $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} = \mathrm{e}^u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, on tire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = \mathrm{e}^{x\ln(\sin t)} = (\sin t)^x$ pour tout $t \in]0, \pi/2]$. Donc

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement sur }]0,\pi/2] \text{ et } \forall t \in]0,\pi/2],\ \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = (\sin t)^x.}$$

14) Soit $x > -1$: $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln(\sin t))^n}{n!} x^n \mathrm{d}t$. Sous réserve qu'on puisse intervertir $\sum$ et $\int$, on obtiendra que : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{(\ln(\sin t))^n}{n!} x^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$ et on aura ainsi développé en série entière la fonction f.
Supposons que $x \in]-1,+1[$. On va utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque ▷ **théorème 16 du chapitre VII** :

- Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur $]0, \pi/2]$ car, d'après la question 8, l'intégrale D_n est convergente et même absolument convergente car la fonction f_n ne change pas de signe ;
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, \pi/2]$ d'après la question 13 ;
- La série de réels $\displaystyle\sum \int_0^{\pi/2} |f_n(t)|\, dt$ converge car, la fonction f_n ne changeant pas de signe, $\int_0^{\pi/2} |f_n(t)|\, dt = \left|\int_0^{\pi/2} f_n(t)\, dt\right| = \left|\frac{D_n}{n!} x^n\right| \sim |x^n|$ d'après la question 12 et la série géométrique $\sum |x|^n$ converge car $|x| < 1$.

Donc la fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\, dt$. Donc

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est développable en série entière sur }]-1,+1[\text{ et } \forall x \in]-1,+1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{n!} x^n}$$

15) Parce que la fonction f est DSE sur $]-1, +1[$, elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$. En particulier, $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = \frac{D_1}{1!} = -\frac{\pi \ln 2}{2}}$ d'après la question 9.

Exercice 3 (tiré de CCP Maths 1 MP 2015)**.**

Soient $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, n un entier naturel non nul et x un réel de $[0, 1]$. On pose le polynôme :

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1 - X)^{n-k}.$$

1) Soit S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, x)$. Montrer que :

$$B_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \mathbf{P}(S_n = k).$$

2) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(u, v) \in [0, 1]^2$:

$$|v - u| < \alpha \implies |f(v) - f(u)| < \varepsilon.$$

Soit un tel α. On note désormais I_α et J_α les parties de $[\![0, n]\!]$ définies par :

$$k \in I_\alpha \iff \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \alpha \qquad \text{et} \qquad k \in J_\alpha \iff \left|\frac{k}{n} - x\right| < \alpha.$$

3) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k\in J_\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\mathbf{P}(S_n=k)\leq\varepsilon.$

4) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k\in I_\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\mathbf{P}(S_n=k)\leq 2\left\|f\right\|_\infty\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\geq\alpha\right).$

5) Rappeler l'espérance $\mathbf{E}(S_n)$ et la variance $\mathbf{V}(S_n)$ de la variable aléatoire S_n.

6) Prouver que : $\mathbf{P}(|S_n-nx|\geq n\alpha)\leq\dfrac{1}{4n\alpha^2}.$

7) Montrer que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\geq N,\ \forall x\in[0,1],\quad |B_n(x)-f(x)|\leq 2\varepsilon.$$

8) Conclure.

---

1) La variable aléatoire S_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$, d'où $S_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et $\forall k\in S_n(\Omega),\ \mathbf{P}(S_n=k)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.
D'une part, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f(x)\mathbf{P}(S_n=k)=f(x)\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(S_n=k)=f(x)$ car $\displaystyle\sum_{k\in S_n(\Omega)}\mathbf{P}(S_n=k)=1$.

D'autre part, $B_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbf{P}(S_n=k)$. Donc $\boxed{B_n(x)-f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\mathbf{P}(S_n=k)}$

2) La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est donc uniformément continue d'après le théorème de Heine.

3) Pour tout $k\in J_\alpha$, $\left|\frac{k}{n}-x\right|<\alpha$ d'où $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|<\varepsilon$, d'où $\displaystyle\sum_{k\in J_\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\mathbf{P}(S_n=k)\leq\sum_{k\in J_\alpha}\varepsilon\mathbf{P}(S_n=k)=$

$\displaystyle\varepsilon\sum_{k\in J_\alpha}\mathbf{P}(S_n=k)\leq\varepsilon\sum_{k\in[\![0,n]\!]}\mathbf{P}(S_n=k)=\varepsilon$. Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k\in J_\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\mathbf{P}(S_n=k)\leq\varepsilon}$

4) Pour tout $k\in I_\alpha$, d'après l'inégalité triangulaire, $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\leq\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|+|f(x)|\leq 2\|f\|_\infty$ car $\|f\|_\infty=\displaystyle\max_{t\in[0,1]}|f(t)|$. D'où $\displaystyle\sum_{k\in I_\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\mathbf{P}(S_n=k)\leq 2\|f\|_\infty\sum_{k\in I_\alpha}\mathbf{P}(S_n=k)=2\left\|f\right\|_\infty\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\geq\alpha\right)$ car l'événement $\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\geq\alpha\right)$ est égal à $\displaystyle\bigcup_{k\in I_\alpha}(S_n=k)$ et cette union est disjointe. Donc

$$\boxed{\sum_{k\in I_\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\mathbf{P}(S_n=k)\leq 2\left\|f\right\|_\infty\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\geq\alpha\right)}$$

5) $\mathbf{E}(S_n)=nx$ et $\mathbf{V}(S_n)=nx(1-x)$.

6) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\mathbf{P}(|S_n-\mathbf{E}(S_n)|\geq a)\leq\dfrac{\mathbf{V}(S_n)}{a^2}$ pour tout réel $a>0$ car la variable aléatoire S_n^2 est d'espérance finie. En particulier, si $a=n\alpha$ qui est bien strictement positif, alors $\boxed{\mathbf{P}(|S_n-nx|\geq n\alpha)\leq\dfrac{nx(1-x)}{(n\alpha)^2}\leq\dfrac{1}{4n\alpha^2}}$

car $\forall x\in[0,1],\ \frac{1}{4}-x(1-x)=x^2-2\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=(x-\frac{1}{2})^2\geq 0$.

7) D'après la question 1 et par l'inégalité triangulaire, $|B_n(x)-f(x)|\leq\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\mathbf{P}(S_n=k)$. Parce que $[\![0,n]\!]$ est l'union disjointe de I_α et de J_α, la dernière somme est la somme des deux sommes majorées aux questions 4 et 3. D'où

$$|B_n(x)-f(x)|\leq 2\left\|f\right\|_\infty\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\geq\alpha\right)+\varepsilon\leq\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}+\varepsilon$$

d'après la question précédente car les événements $\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \alpha\right)$ et $(|S_n - nx| \geq n\alpha)$ sont égaux.
Quantifions : d'après la question 2, le réel α dépend de ε mais ne dépend ni de n ni de x. D'où

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1], \quad |B_n(x) - f(x)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} + \varepsilon.$$

Or $\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $\exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq N,\ \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} \leq \varepsilon$. Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq N,\ \forall x \in [0,1], \quad |B_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

8) On en déduit que $\sup\limits_{x\in[0,1]} |B_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$: la suite des fonctions polynomiales B_n converge uniformément vers la fonction f sur le segment $[0,1]$. En exhibant une telle suite de polynômes, on a prouvé le théorème d'approximation de Weierstrass : toute fonction continue sur le segment $[0,1]$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.
La preuve est due à Sergueï Bernstein et figure dans un article intitulé « *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités* » et paru en 1912 :

Figure 1 – QR-Bernstein