Espaces vectoriels normés

1 Normes

Exercice 1. ♡* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour chaque polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit

$$f(P) = \sum_{i=0}^{n} |P(i)| \quad \text{et} \quad g(P) = |P(0)| + \int_0^1 |P'(t)|\, dt$$

1. Montrer que f est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ mais pas sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que g est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2. * Soit $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ et (f_n) une suite de fonctions de E et $f \in E$. Comparer les convergences

$$1: \ \|f_n - f\|_1 \to 0, \ 2: \ \|f_n - f\|_2 \to 0 \ 3: \ \|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

Exercice 3. ** Soient $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et $N \colon E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\, dt}.$$

1. Montrer que N définit une norme sur E.
2. Montrer que $\| \ \|_\infty \leq \sqrt{2} N$.
3. Montrer que N et $\| \ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 4. ** Soit N l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: $(x,y) \mapsto \sup_{t \in \mathbb{R}} \dfrac{|x + ty|}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. La comparer à la norme euclidienne.
3. Expliquer.

Exercice 5. ♡* Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \ \|P\|_\infty = \max\{|a_0|, \cdots, |a_n|\} \text{ et } \|P\|_* = \max\{|P(t)|, \ | \ t \in [0,1]\}$$

Montrer que ce sont des normes et qu'elles sont deux à deux non équivalentes.

Exercice 6. ** Soit $a \geq 0$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt.$$

1. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $a, b \geq 0$ avec $a \neq b$ et $b > 1$. Démontrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
3. Démontrer que si $(a,b) \in [0,1]$, alors N_a et N_b sont équivalentes.

Exercice 7. ♡** Montrer que pour $n \geq 2$, il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \ \forall P \in GL_n(\mathbb{C}), \ \|P^{-1}AP\| = \|A\|.$$

2 Topologie

Exercice 8. Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit $A \subset E$ un ouvert (resp. un fermé) de E. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda.A = \{\lambda a,\ a \in \mathbb{R}\}$ est un ouvert (resp. un fermé) de E.

Exercice 9. ♡* Donner un exemple d'ensemble A tels que : A, l'adhérence de A, l'intérieur de A, l'adhérence de l'intérieur de A et l'intérieur de l'adhérence de A sont des ensembles distincts deux à deux.

Exercice 10. ♡* Soit E un espace vectoriel normé, et $A, B \subset E$. Soit $A+B = \{x+y \in E;\ x \in A,\ y \in B\}$. Montrer que si A est ouvert, alors $A+B$ est ouvert.

Exercice 11. ♡* Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel normé. Montrer que

1. si $A \subset B$, alors $\bar{A} \subset \bar{B}$
2. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
3. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$;
4. Soit $E = \mathbb{R}$. Trouver deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telle que $\bar{A} \cap \bar{B} \not\subset \overline{A \cap B}$

Exercice 12. Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel normé.

1. ♡♡ ** Démontrer que l'adhérence de C est convexe, puis que l'intérieur de C est convexe.
2. *** On suppose de plus que E est de dimension finie. Montrer que $\overset{o}{\overline{C}} = \overset{o}{C}$. Indication : on prouvera par récurrence sur la dimension de E, que si $U \subset E$ est une partie ouverte et Ω une partie dense et convexe de U, alors, $U = \Omega$.
3. ** Sans l'hypothèse E de dimension finie, la propriété est-elle encore vraie ?

Exercice 13. * Dire si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y\},$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \le 1\}, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\},$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}\}, \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}.$$

Exercice 14. ♡♡** Soit E un epace vectoriel normé et $X \subset E$, une partie de X.

1. On suppose qu'il existe un segment $[A,B] \subset E$ d'extrémités $A \in X$ et $B \in X^c$. Montrer que $\mathrm{Fr}\, X \cap [A,B] \neq \emptyset$.
2. Soit C une partie convexe telle que $C \cap X \neq \emptyset$ et $C \cap \mathrm{Fr}\, X = \emptyset$. Alors $C \subset \overset{o}{X}$.

Exercice 15. ** Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2 telles que leur boule fermée unité coïncident. A-t-on $N_1 = N_2$?

Exercice 16. ♡** Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que si $a, a' \in E$ et $r, r' > 0$ tels que $\overline{\mathcal{B}}(a,r) = \overline{\mathcal{B}}(a',r')$, alors $a = a'$ et $r = r'$.

Exercice 17. ♡♡** Soit E un evn.

1. Montrer que pour toute partie A de E, $Vect(A) \subset Vect(\overline{A}) \subset \overline{Vect(A)}$
2. En déduire que pour tout sev F de E, $\overline{F}$ est un sev de E

Exercice 18. ♡* Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On dit qu'un ensemble $C \subset E$ est convexe si pour tout $(x,y) \in C^2$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in C.$$

Si A est une partie de E, on appelle enveloppe convexe de A, notée $\mathrm{co}(A)$, le plus petit ensemble convexe de E contenant A.

1. Montrer que $\mathrm{co}(A)$ est bien définie pour toute partie $A \subset E$.
2. Montrer que $\mathrm{co}(A)$ contient l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A, c'est-à-dire
$$\big\{\lambda x + (1-\lambda) y; (x,y) \in A^2, \lambda \in [0,1]\big\} \subset \mathrm{co}(A).$$
3. Si A est fermé, $\mathrm{co}(A)$ est-elle fermée ?

Exercice 19. ♡♡** Montrer que dans un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$, les seules parties à la fois ouvertes et fermées sont l'ensemble vide et E lui-même.

3 Continuité

Exercice 20. * Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $(x,y) \mapsto \max(x,y)$, $(x,y) \mapsto \min(x,y)$;
2. $(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4y}{x^6+y^4} \text{ si } (x,y) \neq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$ (Calculer $f(x,x^2)$ et conclure).
3. $(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4y^3}{x^6+y^4} \text{ si } (x,y) \neq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$ (Séparer les cas $x \geq y$ et $y \geq x$) ;
4. $(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4y^2}{x^6+y^4} \text{ si } (x,y) \neq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$ (Poser $x = X^{\frac{1}{3}}$ et $y = Y^{\frac{1}{2}}$, puis passer en polaires) ;

Exercice 21. Soit (A_n) une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} 1 : A_n \to A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ 2 : \forall n \in \mathbb{N},\ A_n \in GL_p(\mathbb{R}) \\ 3 : A_n^{-1} \to B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \end{cases}$$

1. Montrer que A est inversible.
2. Peut-on retirer la propriété 3 ?

Exercice 22. ♡* On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ et la forme linéaire

$$f : P \in E \mapsto P(1).$$

On considère, de plus, les deux normes suivantes sur E définies pour $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ par

$$\|P\|_\infty = \max_i |a_i| \quad \text{et} \quad \|P\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |a_i|.$$

1. Montrer que f est continue pour la norme $\| \ \|_1$. Trouver le petit réel α tel que pour tout $P \in E$, $|f(P)| \leq \alpha \|P\|_1$. On appellera bientôt α la norme subordonnée de f pour la norme $\| \ \|_1$.
2. Montrer que f n'est pas continue pour la norme $\| \ \|_\infty$.

Exercice 23. ♡♡* Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt,$$

dont on admettra qu'il s'agit d'une norme sur E. Soit ϕ l'endomorphisme de E défini par

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

1. Justifier la terminologie : "ϕ est un endomorphisme de E."
2. Démontrer que ϕ est continue.
3. Pour $n \geq 0$, on considère f_n l'élément de E défini par $f_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in [0,1]$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\phi(f_n)\|_1$.
4. On pose $|||\phi||| = \sup_{f \neq 0_E} \dfrac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1}$. Déterminer $|||\phi|||$.

Exercice 24. ** Soit φ est une forme linéaire sur E espace vectoriel normé réel. On veut montrer que φ est continue ssi $\ker\varphi$ est un fermé de E. Pour cela :

1. rappeler pourquoi si φ est continue, alors le noyau de φ est fermé.
2. si F est un sous-espace vectoriel fermé de E, $F \neq E$, alors pour tout $a \in E \setminus F$, $d(a, F) \neq 0$.
3. on suppose que $\ker\varphi = H$ est fermé et soit $a \in E \setminus H$. Montrer que pour tout $x \in E \setminus F$, $y = \dfrac{\varphi(a)}{\varphi(x)}x - a \in H$ et en déduire que
$$\varphi(x) \leq \frac{|\varphi(a)|}{d(a,H)}\|x\|.$$
4. Conclure.

Exercice 25. ♡♡** Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. Pour $x \in E$ on pose $d(x, A) = \inf_{\alpha\in A} \|x - \alpha\|$. Soient $R > 0$ et $A(R) = \{x \in E, d(x, A) \leq R\}$. Montrer que si A est convexe alors $A(R)$ est convexe et fermé.

4 Compacité

Exercice 26. Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts :

$$\begin{array}{ll} A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^4 = 1\} & B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^5 = 2\} \\ C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + xy + y^2 \leq 1\} & D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 8xy + y^2 \leq 1\} \\ E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 = x(1 - 2x)\}. & \end{array}$$

Exercice 27. ♡ Soit $\mathcal{C} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 + \dots + x_n = 1,\ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$. Soit également $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{C}$. Démontrer que $\inf_{x\in\mathcal{C}} f(x) > 0$.

Exercice 28. ♡ Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 29. * Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E. Montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que : K est inclus dans la boule fermée de centre O et de rayon α, et il existe $x \in K$ de norme $\|x\| = \alpha$.

Exercice 30.

1. ♡♡** Soit E un espace vectoriel normé, A un fermé de E et B un compact de E tels que $A \cap B = \emptyset$. Montrer que
$$\exists\delta > 0,\ \forall a \in A,\ \forall b \in B,\ d(a, b) \geq \delta > 0.$$
Le résultat reste-t-il vrai, si on suppose uniquement B fermé ?
2. *(Difficile)* On suppose que E est un espace vectoriel euclidien et $X \subset E$ un fermé. Montrer que s'il existe une boule fermée de rayon non nul fini maximal $\mathcal{B}_F(a, R)$ inclus dans X, alors $\mathrm{Fr}\, X \cap \mathcal{B}_F(a, R)$ contient au moins deux éléments.

Exercice 31. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall M > 0,\ \exists R > 0$ tel que $\|x\| > R \implies |f(x)| > M$.
(ii) Pour toute partie bornée B de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.
(iii) Pour toute partie fermée bornée K de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$.

5 Divers

Exercice 32. ♡♡** Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E est fermé.

Exercice 33. ♡♡*** Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Montrer que la boule unité fermée B_E de E est un convexe, compact, symétrique par rapport à 0 et que 0 est un point intérieur de B_E.
2. Inversement, soit K un convexe, compact, symétrique par rapport à 0, tel que 0 est un point intérieur de K. On pose $J_K(0) = 0$ et, pour $x \in E \setminus \{0\}$, $J_K(x) = \inf\{r > 0,\ x/r \in K\}$. Montrer que J_K définit une norme sur E et décrire sa boule unité fermée.

Exercice 34. * Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$ et soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{4}\sin(x+y), 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y)\right).$$

1. Démontrer qu'il existe une constante $k \in]0,1[$ telle que, quels que soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\|f(x,y) - f(x',y')\|_1 \leq k\|(x,y) - (x',y')\|_1.$$
2. En déduire que le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{4}\sin(x+y) & = & x \\ 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y) & = & y \end{array}\right.$$
admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.
3. Aurait-on pu appliquer la même méthode en utilisant la norme $\|.\|_\infty$ au lieu de la norme $\|.\|_1$?

Exercice 35. *(Difficile)* Soit C une partie non vide de E espace vectoriel euclidien. Montrer que C est un convexe fermé ssi pour tout $y \in E$, il existe un unique $x \in C$ tel que $d(y,C) = d(y,x)$. Le sens $\Rightarrow$ est $(***)$, mais classique et $\Leftarrow$ $(****)$.

Exercice 36. Soient a un nombre complexe et r un réel strictement positif. Montrer que l'application qui à $P \in \mathbb{C}[X]$ associe $\|P\| = \max\{\|P(z)\|,\ z \in \overline{B}(a,r)\}$ définit une norme. Montrer qu'il existe $M_r > 0$ tel que : $\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \|P'\| \leq M_r\|P\|$.

Exercice 37. ♡ Soit A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il n'existe pas de $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(A) \subset \mathbb{R} \setminus A$ et $f(\mathbb{R} \setminus A) \subset A$.

Exercice 38. ♡♡** Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. On note $S = \{u \in \mathcal{L}(E),\ u^2 = Id_E\}$.

1. Montrer que id_E est un point isolé de S.
2. Déterminer tous les points isolés.
3. L'ensemble S est-il fermé ? compact ?

Exercice 39. ♡♡** Soit E un espace vectoriel normé et $K \subset E$ une partie compacte de E et soit $f : K \to K$ une application continue telle que $\forall x, y \in K,\ x \neq y,\ \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.
Montrer que f admet un unique point fixe sur K.

Exercice 40. (*Théorème de Riesz*) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension infinie. On considère F un sous-espace vectoriel de dimension finie.
On définie d_F l'application de E dans $\mathbb{R}_+$qui à $x \in E$ associe $\inf_{y \in F} \|x - y\|$

1. Justifier que l'application d_F est correctement définie.
2. Montrer que pour tout $a \in E$, il existe $y \in F$ tel que $d_F(a) = \|a - y\|$.
3. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $d_F(a) = 1$ et $\|a\| = 1$.
4. En déduire que la sphère unité de E n'est pas compacte.

Espaces vectoriels normés

(Solutions)

Solution 1.

1. Montrons que $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^+$est une norme
   (a) $f(0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} 0 = 0$;
   (b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = 0$. Donc pour tout $i \in [\![0, n]\!], P(i) = 0$. Donc P a $n+1$ racines. Or c'est un polynôme de degré au plus n. Donc $P = 0$.
   (c) $f(\lambda P) = \sum_{i=0}^{n} |\lambda P(i)| = |\lambda| f(P)$
   (d) $f(P+Q) = \sum_{i=0}^{n} |P(i) + Q(i)| \leq \sum_{i=0}^{n}(|P(i)| + |Q(i)|) = f(P) + f(Q)$

   L'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^+$n'est pas une norme car $f\left(\prod_{i=0}^{n}(X-i)\right) = 0$ et $\prod_{i=0}^{n}(X-i) \neq 0$
2. Montrons que $g : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^+$est une norme
   (a) $g(0) = 0 + \int_0^1 0 dt = 0$;
   (b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $g(P) = 0$. Donc $\int_0^1 |P'(t)|\, dt = 0$. D'où pour tout $t \in [0,1]$ $P'(t) = 0$. Donc le polynôme P' a une infinité de racines. Donc $P' = 0$. D'où P est constant. Maintenant $P(0) = 0$. Donc $P = 0$
   (c) $g(\lambda P) = |\lambda P(0)| + \int_0^1 |\lambda P'(t)|\, dt = |\lambda| g(P)$
   (d) $g(P+Q) = |(P+Q)(0)| + \int_0^1 |(P+Q)'(t)|\, dt \leq |P(0)| + |Q(0)| + \int_0^1 (|P'(t)| + |Q'(t)|)\, dt = g(P) + g(Q)$

Solution 2. C'est du cours

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt \leq (b-a)\|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2} \leq \sqrt{b-a}\, \|f\|_\infty$$

Donc 3/ implique 1/ et 3/ implique 2/. De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous dit que

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \leq \left(\int_a^b dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b f(t)^2\, dt\right)^{1/2} = \sqrt{b-a}\, \|f\|_2$$

D'où 2/ implique 1/.
On montre qu'il n't a pas d'autres implications. La fonction $f_n : x \mapsto \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^n$ a pour norme respective $\|f_n\|_1 = \dfrac{b-a}{n+1}$, $\|f_n\|_2 = \sqrt{\|f_{2n}\|} = \dfrac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{2n+1}}$ et $\|f_n\|_\infty = 1$. La suite (f_n) tend vers 0 pour les normes 1 et 2, mais pas pour la norme infini.
La suite $(\sqrt{n} f_n)$ tend vers 0 pour la norme 1 mais pas pour la norme 2/.

Solution 3.

1. On montre que $< f, g >= f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ défini un produit scalaire sur E : les fonctions f' et g' étant continues, elles sont intégrables ; la forme est bilinéaire symétrique et positive. Si $< f, f >= 0$, alors il vient $f(0)^2 = 0$ et $\int_0^1 f'^2(t)dt$, d'où $f' = 0$ puisque f' est continue. La fonction f est constante, et $f(0) = 0$ montre qu'elle est la fonction nulle. N est la norme euclidienne associée au produit scalaire.

2. Pour tout $x \in [0;1]$, on a $f(x) = f(0) + \int_0^1 f'(t)dt$ et donc

$$f^2(x) = f^2(0) + 2f(0)\int_0^x f'(t)dt + \left(\int_0^x f'(t)dt\right)^2$$

mais $2f(0)\int_0^x f'(t)dt \leq f(0)^2 + \left(\int_0^x f'(t)dt\right)^2$ car $2ab \leq a^2 + b^2$, donc

$$f^2(x) = 2[f^2(0) + \left(\int_0^x f'(t)dt\right)^2] \quad (*)$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\left(\int_0^x f'(t)dt\right)^2 \leq \int_0^x dt \int_0^x f'^2(t)dt \leq \int_0^x f'^2(t)dt \leq \int_0^1 f'^2(t)dt$$

Avec $(*)$, on a montré que $\|f(x)\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.
L'exemple, $f(t) = 1+$ montre que l'on ne peut pas mieux.

3. Les deux normes ne sont pas équivalents ; pour le voir, on pose $f_n(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a $\|f_n\|_\infty = 1$, $N(f_n) = \dfrac{n}{\sqrt{2n-1}}$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = +\infty$.

Solution 4.

1. D'abord, si $N(x,y) = 0$, alors pour tout t, on a $x + ty = 0$. Choisir $t = 0$ montre que l'on a $x = 0$. Ensuite, si on prend $t = 1$, on obtient également $y = 0$, et donc $(x,y) = 0$. L'homogénéité est claire. Enfin, pour tous (x,y) et tous (x',y'), on a

$$|((x+x') + t(y+y')| \leq |x+ty| + |x'+ty'|,$$

en utilisant simplement l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue. On en déduit :

$$\frac{|((x+x') + t(y+y')|}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{|x'+ty'|}{1+t^2} \leq N(x,y) + N(x',y').$$

Passant au sup, on obtient :

$$N((x,y) + (x',y')) \leq N(x,y) + N(x',y').$$

2. D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a :

$$|x+ty| \leq \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+t^2},$$

ce qui donne

$$\frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}} \leq N_2(x,y).$$

Pour minorer $N(x,y)$ à l'aide de $N_2(x,y)$, on va donner une valeur particulière au paramètre t. Pour cela, on va (enfin !) étudier la fonction qui à t associe $|x+ty|/\sqrt{1+t^2}$, ou plus précisément le carré de cette fonction. On pose donc :

$$f(t) = \frac{(x+ty)^2}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Le calcul de la dérivée donne, après simplifications :

$$f'(t) = \frac{2(x+ty)(y-tx)}{(1+t^2)}.$$

f est donc maximale pour $t = y/x$. Et si on évalue en y/x la quantité $|x+ty|/\sqrt{1+t^2}$, on trouve précisément... $N_2(x,y)$. On vient donc de démontrer que $N(x,y) = N_2(x,y)$, ce qui nous aurait bien simplifié la vie pour les questions précédentes... il suffit de donner par exemple la valeur 1 et la valeur -1 au paramètre t.

3. Voila une explication, parmi d'autres, au fait que $N = N_2$. La distance (dans le plan muni d'un repère euclidien) du point M de coordonnées (x, y) à la droite d'équation $X + tY = 0$ vaut précisément $|x + ty|/\sqrt{1+t^2}$. Cette distance est toujours inférieure à la distance de M à l'origine, qui vaut $N_2(x, y)$. Voila pourquoi on a $N(x, y) \leq N_2(x, y)$. Cette distance vaut exactement la distance à l'origine lorsque la droite que l'on considère est perpendiculaire à (OM). C'est ainsi que l'on a $N(x, y) \geq N_2(x, y)$.

Solution 5. Notons que $\|P\|_*$ existe car P est continue sur le segment $[0, 1]$. De plus, par inégalité triangulaire

$$\forall t \in [0,1], \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \quad \text{et } \max\{|a_0|, \cdots, |a_n|\} \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

donc $\|P\|_* \leq \|P\|_1$ et $\|P\|_\infty \leq \|P\|_1$.
Soit $P_n = 1 + \cdots + t^n$, alors $\|P_n\|_1 = \|P_n\|_* = n + 1$ et $\|P_n\|_\infty = 1$. On en déduit que $\| \ \|_\infty$ n'est équivalente ni à $\| \ \|_1$, ni à $\| \ \|_*$.
Enfin, $Q_n = (1 - X)^n$ vérifie $\|Q_n\|_* = 1$ et $\|Q_n\|_1 = 2^n$, donc $\| \ \|_*$ et $\| \ \|_1$ ne sont pas équivalentes.

Solution 6.

1. La seule difficulté est de vérifier que $N_a(P) = 0 \implies P = 0$. Mais si $N_a(P) = 0$, on a à la fois $|P(a)| = 0$ et $\int_0^1 |P'(t)|dt = 0$. Or, $|P'|$ est une fonction continue, positive, d'intégrale nulle sur $[0, 1]$. Donc $P' = 0$ sur $[0, 1]$. Comme P' est un polynôme, ceci entraîne que $P' = 0$ ou encore que P est un polynôme constant. Puisque $P(a) = 0$, on en déduit que P est identiquement nul.
2. Supposons que N_a et N_b sont équivalentes. Alors, il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :
$$C_1 N_a(P) \leq N_b(P) \leq C_2 N_a(P).$$
Pour $n \geq 0$, soit $P(X) = X^n$. On a
$$N_a(P) = a^n + n\int_0^1 t^{n-1}dt = a^n + 1 \text{ et } N_b(P) = b^n + 1.$$
On en déduit alors que, pour tout $n \geq 0$,
$$b^n + 1 \leq C_2(a^n + 1) \iff 1 + \frac{1}{b^n} \leq C_2\left(\frac{a}{b}\right)^n + \frac{1}{b^n}.$$
Or, le membre de gauche tend vers 1 et le membre de gauche vers 0, si $a < b$. On obtient en passant à la limite $1 \leq 0$, ce qui est absurde. Si $a > b > 1$, on permute les rôles de a et b. L'hypothèse de départ est donc fausse, et N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
3. Supposons par exemple $a \leq b$. Alors
$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(t)dt \leq \int_0^1 |P'(t)|dt.$$
Ainsi,
$$|P(b)| \leq |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt \leq N_a(P).$$
Il vient
$$N_b(P) \leq N_a(P) + \int_0^1 |P'(t)|dt \leq 2N_a(P).$$
On a de la même façon
$$|P(a)| \leq |P(b)| + \int_0^1 |P'(t)|dt \leq N_b(P)$$
et donc
$$N_a(P) \leq 2N_b(P).$$
Les deux normes sont bien équivalentes.

Solution 7. Il suffit de trouver une matrice A qui est semblable à λA, avec $|\lambda| \neq 1$: on prend une matrice nilpotente : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$ pour $\lambda \neq 0$.

Solution 8. Remarquons que $\lambda x \in \lambda.A$ ssi $x \in A$.
Soit $\lambda a \in \lambda.A$. Si A est ouvert, alors il existe $B(a, \rho) \subset A$ et $B(\lambda a, |\lambda|\rho) \subset \lambda.A$ et donc $\lambda.A$ est ouvert.
On vérifie que $\lambda x \notin \lambda.A \iff x \notin A$ et donc le complémentaire est un ouvert.

Solution 9. On va considérer une partie de $\mathbb{R}$. Un singleton est d'intérieur vide, et un intervalle ouvert a pour adhérence l'intervalle fermé : on considère donc d'abord :

$$B = \{0\} \cup]1, 2[.$$

Si l'on veut ensuite que l'intérieur de l'adhérence de A soit différent de A, il est judicieux que 2 soit dans l'intérieur de l'adhérence de A, et pour cela on colle un intervalle ouvert de l'autre côté de A. On pose alors :

$$A = \{0\} \cup]1, 2[\cup]2, 3[.$$

On a :

$$\overset{\circ}{A} =]1, 2[\cup]2, 3[,$$
$$\bar{A} = \{0\} \cup [1, 3],$$
$$Int(\bar{A}) =]1, 3[,$$
$$Adh(\overset{\circ}{A}) = [1, 3],$$

ce qui prouve bien que tous ces ensembles sont différents.

Solution 10. Remarquons que :

$$A + B = \bigcup_{b \in B} A + b.$$

La réunion d'une famille (quelconque) d'ouverts étant un ouvert, il suffit de prouver que $A + \{b\}$ est ouvert pour chaque b de B. Soit $z \in A + \{b\}$, $z = x + b$ avec $x \in A$. Puisque A est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$. Mais alors, $B(z, \varepsilon) = B(x + b, \varepsilon) \subset A + b$. En effet, si y est élément de cette boule, $N((y - b) - x) < \varepsilon$, et donc $y - b = a$ avec $a \in B(x, \varepsilon) \subset A$. D'où $y = a + b \in A + \{b\}$.

Solution 11.

1. Soit $a \in \bar{A}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in B(a, \varepsilon) \cap A \subset B(a, \varepsilon) \cap B$. Donc a appartient à $\bar{B}$. D'où $\bar{A} \subset \bar{B}$.
2. $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ done par la première question $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. L'ensemble $\bar{A} \cup \bar{B}$ est un fermé comme union de deux fermés. De plus, $A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Par double inclusion, on a montré l'égalité demandée.
3. $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ done par la première question $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$
4. On pose $A = [0, 1[$ et $B = [1, 2]$. On a alors

$$\overline{A \cap B} = \emptyset \neq \{1\} = [0, 1] \cap [1, 2] = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Solution 12.

1. Soit $x, y \in \bar{C}$, et $t \in [0, 1]$. Alors x (resp. y) est limite d'une suite (x_n) (resp. (y_n)) d'éléments de C. Puisque C est convexe, la suite (z_n) définie par

$$z_n = tx_n + (1 - t)y_n$$

est dans C. La suite (z_n) converge vers $tx+(1-t)y$, et cette limite est dans $\bar{C}$. D'où $tx+(1-t)y \in \bar{C}$. Par définition de la convexité, $\bar{C}$ est donc convexe.

Prouvons maintenant le résultat concernant l'intérieur. Soit $x, y \in \overset{\circ}{C}$, $x \neq y$, et soit $z = tx-(1-t)y \in$

$]x,y[$. Par définition de l'intérieur, il existe $\varepsilon > 0$, tel que $B(x,\varepsilon) \subset C$ et $B(y,\varepsilon) \subset C$. Faites un dessin !

On va montrer que $B(z,\varepsilon) \subset C$ et ainsi $z \in \overset{\circ}{C}$ et $\overset{\circ}{C}$ sera convexe.

Soit donc $M \in B(z,\varepsilon)$, on pose $M_x = M - z + x$ et $M_y = M - z + y$ de sorte que $\|M_x - x\| = \|M_y - y\| = \|M - z\|$. On vérifie que $M = tM_x + (1-t)M_y$ et $M \in C$. Ainsi $B(z,\varepsilon) \subset C$, ce qui montre que C est un ouvert.

2. Il résulte de la première partie que $\overset{o}{\bar{C}}$ est un convexe.

   De plus, $D = C \cap \overset{o}{\bar{C}}$ est convexe comme intersection de deux convexes et est dense dans $\overset{o}{\bar{C}}$, puisque $\overset{o}{\bar{C}} \subset \bar{C}$. Montrons que si U est un ouvert et $\Omega \subset U$ une partie convexe et dense dans U, alors $U = \Omega$.

   On obtient ainsi que $D = \overset{o}{\bar{C}} \subset C$. D'où $\overset{o}{\bar{C}} \subset \overset{o}{C}$. L'autre inclusion étant immédiate.

   Dans la suite, on suppose que E est de dimension finie, car on va montrer la propriété attendue par récurrence sur la dimension n de E.

   Initialisation : Si $n = 1$, les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Un ouvert qui contient un intervalle comme partie dense est un intervalle ouvert. La propriété est donc vraie.

   Hérédité : On suppose que le résultat est vraie pour tout espace vectoriel normé de dimension $n-1$. Soit $U \subset E$ une partie ouverte et $\Omega \subset U$ une partie convexe et dense dans U.

   Soit H un hyperplan de E. On pose $U' = H \cap U$ et $\Omega' = H \cap \Omega$. Alors U' est un ouvert de H et Ω' une partie convexe de H.

   On montre que Ω' est dense dans U', et par hypothèse de récurrence, on obtient $\Omega' = U'$. Comme le résultat sera vrai pour tout hyperplan, il vient $U = \Omega$.

   Un hyperplan est définie comme le noyau d'une forme linéaire φ. Alors $H_+ = \{x \in E,\ \varphi(x) > 0$ et $H_- = \{x \in E,\ \varphi(x) < 0\}$ sont deux ouverts de E.

   Par hypothèse, $U \cap H_+$ et $U \cap H_-$ sont des ouverts. Par densité de Ω, pour tout $a \in U'$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(a, \dfrac{1}{n}) \cap H_+ \cap \Omega \neq \emptyset$. Il existe donc une suite $(x_n^+) \in (H_+ \cap \Omega)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a.

   De même, il existe, $(x_n^-) \in (H_- \cap \Omega)^{\mathbb{N}}$ qui convergent vers a. La suite (z_n) définie par $z_n = [x_n^+, x_n^-] \cap H$ converge elle aussi vers a. Par convexité de Ω, $z_n \in \Omega'$. Ce qui montre que Ω' est dense dans U', ce qui termine la preuve.

3. Si E n'est pas de dimension finie, le résultat devient faux : $\mathbb{R}[X]$ est dense (Théorème de Weierstrass) dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme $\| \ \|_\infty^{[a,b]}$ et d'intérieur vide.

<u>**Solution 13.**</u> On écrit $A =]0,1[\times\mathbb{R} \cup]1,2[\times\mathbb{R}$ qui est un ouvert comme produit d'ouverts.

De plus, $F = \mathcal{B}(O,2)$ est un ouvert.

Posons $B = (\mathbb{R}^+)^2 \cap B'$ avec $B' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y\}$. Montrons que B'^c est un ouvert, donc B' est un fermé et B est l'intersection de deux fermés.

Preuve de B'^c ouvert : soit $(a,b) \in B'^c$ est fermé, alors $\dfrac{a-b}{2} = \varepsilon > 0$ et pour tout $(x,y) \in \mathcal{B}((a,b),\varepsilon)$, $x - y = x - a + a - b - (y - b) > -\varepsilon + 2\varepsilon - \varepsilon = 0$, donc $(x,y) \in B'^c$.

En utilisant la caractérisation des fermés par les suites, on montre C, C^c, D, D^c, E et E^c ne sont pas des fermés : on note respectivement $u_n = (\cos\frac{1}{n}, 0)$, $v_n = (0, 1 + \frac{1}{n})$, $w_n = (10^{-n}\lfloor 10^n\sqrt{2}\rfloor, 10^{-n}\lfloor 10^n\sqrt{2}\rfloor)$, $x_n = (\frac{1}{n}\sqrt{2}, \frac{1}{n}\sqrt{n})$ qui sont des suites convergentes.

On a $u \in C^{\mathbb{N}}$, mais $\lim u = (1,0) \notin C$. $v \in (C^c)^{\mathbb{N}}$, mais $\lim v = (0,1) \notin C^c$.

$w \in D^{\mathbb{N}} \cap (E^c)^{\mathbb{N}}$, mais $\lim w = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin D$ et $\notin E^c$.

$x \in (D^c)^{\mathbb{N}} \cap E^{\mathbb{N}}$, mais $\lim u = (1,0) \notin D^c$ et $\notin E$.

<u>**Solution 14.**</u>

1. On suppose que $A, B \notin \mathrm{Fr}\, X$. Il existe donc $\varepsilon > 0$, tel que $\mathcal{B}(A,\varepsilon) \subset \overset{\circ}{X}$ et $\mathcal{B}(B,\varepsilon) \subset \left(\overline{X}\right)^c$.

   Soit $M_t = tA + (1-t)B$ et soit $t_0 = \sup\{t \in \mathbb{R},\ [A, M_t] \subset X\}$. Comme $\mathcal{B}(A,\varepsilon) \subset X$, $\{t \in [0,1],\ [A, M_t] \subset X\}$ est une partie non vide et est minorée par ε.

   comme $\mathcal{B}(B,\varepsilon) \cap X = \emptyset$ elle est majorée par $1 - \varepsilon$.

   On en déduit que t_0 existe et que pour tout $\varepsilon' > 0$, $[M_{t_0 - \varepsilon'}, M_{t_0}] \cap X \neq \emptyset$ et $[M_{t_0}, M_{t_0+\varepsilon'}] \cap X^c \neq \emptyset$. Donc M_{t_0} appartient à la frontière de X.

2. Par hypothèse il existe $A \in C \cap \overset{o}{X}$. Supposons qu'il existe $B \in C \cap (\overset{o}{X})^c$. Comme C est convexe, $[A, B] \subset C$. La question précédente montre qu'alors $[A, B] \cap \operatorname{Fr} \overset{o}{X} \neq \emptyset$.

   Comme $\operatorname{Fr} \overset{o}{X} = \overline{\overset{o}{X}} \setminus \overset{o}{X} \subset \overline{X} \setminus \overset{o}{X} = \operatorname{Fr} X$, on en déduit que $[A, B] \cap \operatorname{Fr} X \neq \emptyset$ ce qui contredit les hypothèses sur C.

   On a montré que $C \subset \overset{o}{X}$.

Solution 15. S'il existe $x \in E$ tel que $N_1(x) > N_2(x)$, alors $N_1\left(\dfrac{x}{N_2(x)}\right) > N_2\left(\dfrac{x}{N_2(x)}\right) = 1$. Ce qui montre que $\dfrac{x}{N_2(x)}$ appartient à la boule unité fermée pour la norme 2 mais pas pour la norme 1. On en déduit que N_1 et N_2 coïncident.

Solution 16.

1. On commence par montrer que le diamètre d de $\mathcal{B}_F(a, r)$ vaut $d = 2r = \sup\{\|z - z'\|,\ z, z' \in \overline{\mathcal{B}}(a, r)\}$: c'est un majorant car $\|z - z'\| \leq \|z - a\| + \|z' - a\| \leq 2r$. De plus, si $b \neq a$, on pose $\lambda = \dfrac{r}{\|b - a\|}$ et $b_\pm = \pm\lambda(b - a) + a$. Alors b_+ et b_- vérifient $\|b_\pm - a\| = r$ et $\|b_+ - b_-\| = 2r$.

   On en déduit que que $r = r'$ et que a est le milieu de $[b_+, b_-]$.
2. Si $M, N \in \mathcal{B}_F(a, r)$ tels que $\|MN\| = 2r$, alors $2r = \|M - N\| \leq \|M - a\| + \|N - a\| \leq 2r$. On en déduit que $\|M - a\| = \|N - a\| = r$.
3. Appliquons le 1/ à $b = a'$ où l'on a supposé $= a' \neq a$. Alors $\|b_+ - b_-\| = 2r$, et donc a et a' sont des milieux de $[b_+, b_-]$. Or un segment a un unique milieu : l'application $[A, B] \to \mathbb{R}$, $M_t = (1 - t)1A + tB \mapsto \|AM_t\| = |1 - t|\|B - A\|$ est injective sur $[0, 1]$. On en déduit que $a = a'$.

Solution 17.

1. On a $A \subset \overline{A}$ donc $\operatorname{Vect}(A) \subset \operatorname{Vect}(\overline{A})$.

   Soit $x \in \operatorname{Vect}(\overline{A})$, $x = \sum_{i=1}^{r} z_i x_i$ avec les x_i dans $\overline{A}$. Pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, x_i est limite d'une suite $(a_{i,n})$ de A.

   Soit alors, pour n fixé, $a_n = \sum_{i=1}^{r} z_i a_{i,n}$. Alors $a_n \in Vect(A)$ et la suite (a_n) tend vers $\sum z_i x_i = x$.

   Donc $x \in \overline{Vect(A)}$. Ce qui montre que $Vect(\overline{A}) \subset \overline{Vect(A)}$.
2. F étant un sous-espace vectoriel, on en déduit, $F = Vect(F) \subset Vect(\overline{F}) \subset \overline{Vect(F)} = \overline{F}$. Donc $Vect(\overline{F})) = \overline{F}$ et donc $\overline{F}$ est un sev de E.

Solution 18.

1. Définissons B comme l'intersection de toutes les parties convexes de E contenant A. L'ensemble B est non vide puisque E est une partie convexe (c'est un espace vectoriel) contenant A. De plus B contient évidemment A, et B est convexe car l'intersection de parties convexes est convexe : soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de parties convexes de E indexée par un ensemble d'indices I. Soient $x, y \in \cap_i C_i$ et $\lambda \in [0, 1]$. Comme pour tout $i, x, y \in C_i$ qui est convexe, on a

   $$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C_i,$$

   et donc $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \cap_i C_i$. Enfin B est le plus petit ensemble convexe contenant A, car un autre ensemble convexe contenant A apparait nécessairement dans l'intersection définissant B. On a donc montré l'existence d'un plus petit ensemble convexe de E contenant A.
2. Si $z = \lambda x + (1 - \lambda)y \,\text{avec}(x, y) \in A^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, alors sachant que $x, y \in A \subset \operatorname{co}(A)$, on obtient immédiatement que $z \in \operatorname{co}(A)$ comme combinaison convexe de deux éléments du convexe $\operatorname{co}(A)$.
3. Considérons dans $\mathbb{R}^2$, $A = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{(0, 1)\}$. Alors A est fermé comme union de deux fermés, mais nous allons montrer que

   $$\operatorname{co}(A) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x, y) = (0, 1) \text{ ou } (x \in \mathbb{R} \text{ et } 0 \leq y < 1)\big\}$$

qui n'est évidemment pas fermé. Soit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; (x,y) = (0,1) \text{ ou } (x \in \mathbb{R} \text{ et } 0 \leq y < 1)\}$ et montrons que $\mathrm{co}(A) = B$. Tout d'abord, $\mathrm{co}(A) \subset B$ car on vérifie facilement que B est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$, qui bien sûr contient A. Inversement, soit $(x,y) \in B$. On peut supposer que $0 < y < 1$ sinon $(x,y) \in A \subset \mathrm{co}(A)$. Alors on s'aperçoit facilement que

$$(x,y) = (1-y)\left(\frac{x}{1-y}, 0\right) + y(0,1),$$

et donc (x,y), comme combinaison convexe de deux points de A, appartient nécessairement à $\mathrm{co}(A)$ d'après le **2**.

Solution 19. Supposons qu'il existe une partie $X \subset E$ telle que $X \neq \emptyset, E$ et X ouvert et fermé. Alors il existe $x \in X$ et $y \in Y$. On coonstruit par récurrence :

1. $x_0 = x$, $y_0 = y$, $u_0 = 1$, $v_0 = 1$;
2. Si $x_n = (1-u_n)x + u_n y$ et $y_n = (1-v_n)x + v_n y_n$ sont construits, alors si $\dfrac{x_n + y_n}{2}$
   (a) appartient à X, on pose $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $y_{n+1} = y_n$, $v_{n+1} = v_n$.
   (b) appartient à X^c, on pose $x_{n+1} = x_n$, $u_{n+1} = u_n$ et $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

   Les suites de réels (u_n) et (v_n) sont adjacentes car $u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1$ et $v_n - u_n = \dfrac{1}{2^n}$. On en déduit que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite l. Les suites (x_n) et (y_n) convergent aussi vers une même limite $a = (1-l)x + ly$. Comme $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ et $(y_n) \in (X^c)^{\mathbb{N}}$, $a \in \overline{X} \cap \overline{X^c}$. Par hypothèse X et X^c sont des parties fermées, donc $a \in X \cap X^c$. On en déduit que ce n'est pas possible. Donc soit X, soit X^c est vide.

Solution 20.
1. La fonction $(x,y) \mapsto \max(x,y)$ est continue sur sur le demi plan ouvert $P_1 : x > y$ et alors $\max(x,y) = x$, et $df_{(x,y)}(h_1,h_2) = h_1$. De même sur $P_2 : x < y$, $\max(x,y) = y$ et $df_{(x,y)}(h_1,h_2) = h_2$.
Mais en tout point (x,x), on remarque que

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \frac{\max(x+t,x) - \max(x,x)}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \frac{t}{t} = 1$$

et

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t<0}} \frac{\max(x+t,x) - \max(x,x)}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t<0}} \frac{0}{t} = 0$$

donc il n'existe pas dérivée partielle suivant x.
le problème est le même pour $(x,y) \mapsto \min(x,y)$.

2. L'applcation $(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{x^6 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$ n'est pas continue en $(0,0)$, car, ainsi que nous le suggère l'énoncé,

$$\lim_{x \to 0} f(x,x^2) = \lim_{x \to 0} \frac{x^6}{x^6 + x^8} = 1 \neq 0.$$

L'application est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

3. L'application $(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4 y^3}{x^6 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
On va montrer que la fonction est continue en $(0,0)$. Pour cela, on remarque que f est paire en x et impaire en y, donc il suffit de montrer la relation pour $x, y \geq 0$. Ensuite on fait un encadrement bien choisi de $f(x,y)$ suivant que $x \geq y$ et $y \geq x$; si $x \geq y$, alors

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{x^7}{x^6 + y^4} \leq \frac{x^7}{x^6} \leq x \leq \|(x,y)\|$$

et si $y \geq x$

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{y^7}{x^6+y^4} \leq \frac{y^7}{y^4} \leq y^3 \leq \|(x,y)\|^3$$

et donc quand (x,y) tend vers 0, alors $f(x,y)$ tend aussi vers 0.

4. L'application $(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4y^2}{x^6+y^4} \text{ si } (x,y) \neq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour l'étude en $(0,0)$, en raison de la parité en x et y, on peut supposer $x, y \geq 0$ et on peut poser $x = X^{\frac{1}{3}}$ et $y = Y^{\frac{1}{2}}$; on calule

$$f(X,Y) = \frac{X^{4/3}Y}{X^2+Y^2} = \frac{\rho^{7/3}\cos^{4/3}\theta\sin\theta}{\rho^2} = \rho^{1/3}\cos^{4/3}\theta\sin\theta,$$

où l'on a fait ensuite le changement en coordonnées polaires.
Et l'expression obtenue montre que si ρ tend vers 0, alors $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ tend bien vers 0. Et donc f est continue en $(0,0)$.

5. L'application $(x,y) \mapsto \sqrt{|x|+|y|}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, mais n'est dérivable suivant en x en 0 : $f(x,0) = \sqrt{|x|}$ n'est pas dérivable.

6. L'application $(x,y) \mapsto \ln(1+\sqrt{x^2+y^2})$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Mais f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $(0,0)$: il suffi de calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \dfrac{x}{|x|} \times \dfrac{1}{1+|x|}$ qui tend en 0^- vers -1 et en 0^+ vers 1, donc la dérivée n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

<u>**Solution 21.**</u> L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue, car polynomiale. Donc $(\det A_n)$ converge vers $\det A$ et $(\det A_n^{-1})$ converge vers $\det B$. Or $\det(A^n)^{-1} = (\det A_n)^{-1}$. Donc $\det B = (\det A)^{-1}$. En particulier, $\det A$ est non nul, d'où le résultat.
Si on ne suppose plus la condition 3, alors $A_n = \frac{1}{n}I_p$ donne un contre-exemple : $\lim A_n = 0$ n'est pas inversible.

<u>**Solution 22.**</u>

1. La fonction f est linéaire, 1-lipschitzienne, donc continue pour la norme $\| \ \|_1$, donc $\alpha \leq 1$. De plus, si P est le polynôme constant 1, alors $\|f(P)\|_1 = \| \ P\|_1 = 1$, donc $\alpha = 1$.
2. Si $P_n = 1 + \cdots + X^n$, alors $\|P_n\| = 1$ et $|f(P_n)| = n+1$. L'application linéaire f n'est pas lipschitzienne pour la norme $\| \ \|_\infty$, donc n'est pas continue.

<u>**Solution 23.**</u>

1. ϕ est clairement une application linéaire, et il faut juste rappeler que $\phi(f)$, comme primitive d'une fonction continue, est elle-même continue (donc C^1).
2. On a
$$|\phi(f)(x)| \leq \int_0^x |f(t)|dt \leq \int_0^1 |f(t)|dt \leq \|f\|_1.$$
On en déduit que
$$\|\phi(f)\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_1 dt \leq \|f\|_1.$$
Ainsi, ϕ est continue.
3. On a $\phi(f_n)(x) = \int_0^x ne^{-nt}dt = 1 - e^{-nx}$. En particulier, $\|f_n\|_1 = \phi(f_n)(1) = 1 - e^{-n}$. De plus,
$$\|\phi(f_n)\|_1 = \int_0^1 (1-e^{-nx})dx = 1 - \frac{1-e^{-n}}{n}.$$
4. D'après la question 2, pour tout $f \in E$,
$$\|\phi(f)\|_1 \leq \|f\|_1,$$

et donc $\|\|\phi\|\| \leq 1$. De plus, on a

$$\|\phi(f_n)\|_1 \leq \|\|\phi\|\|\|f_n\|_1 \implies 1 - e^{-n} \leq \left(1 - \frac{1 - e^{-n}}{n}\right) \|\|\phi\|\|.$$

Passant à la limite dans cette inégalité, on conclut que $\|\|\phi\|\| \geq 1$, ce qui prouve finalement que $\|\|\phi\|\| = 1$.

<u>**Solution 24.**</u>

1. On prend une boule fermée de centre a et de rayon $\|b - a\|$ avec $b \in F$. Alors l'inf est atteint dans la boule car fermée bornée. En particulier, il est non nul.
2. On calcule $\varphi(y) = 0$.
3. On sait que la distance de a à un point de H est minorée, d'où le résultat.

<u>**Solution 25.**</u> L'application $\varphi : x \mapsto d(x, A)$ est continue car 1-lipschitzienne. Donc $A(R)$ image récirpoque de $[0, R]$ par l'application continue φ est un fermé.
De plus si $\forall a, b \in A(R)$, $\forall x, y \in A$, $\forall t \in [0, 1]$

$$tx + (1 - t)y \in X \text{ et } \|ta + (1 - t)b - (tx + (1 - t)y)\| \leq t\|a - x\| + (1 - t)\|b - y\|$$

ce qui montre que $d(ta + (1 - t)b, A(R)) \leq td(a, A) + (1 - t)d(b, A) \leq R$. Donc $ta + (1 - t)b \in A(R)$.

<u>**Solution 26.**</u>

A- Puisque $x^2 \geq 0$ et $y^4 \geq 0$, l'équation $x^2 + y^4 = 1$ entraine $x^2 \leq 1$ et $y^4 \leq 1$. On obtient donc $x \in [-1, 1]$ et $y \in [-1, 1]$, ie $\|(x, y)\|_\infty \leq 1$: A est borné. De plus, f est l'image réciproque de $\{1\}$, qui est fermé, par l'application continue $f(x, y) = x^2 + y^4$. A est donc également fermé. C'est bien une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.

B- B n'est pas borné. En effet, pour tout $r > 0$, $(r, \sqrt[5]{2 - r^2})$ est élément de B (remarquons que l'on peut prendre la racine 5-ième de *tout* réel (il ne doit pas être nécessairement positif). Mais $\|(r, \sqrt[5]{2 - r^2})\|_\infty \geq r$ peut être aussi grand que l'on veut. B n'est donc pas borné, et pas compact.

C- On sait que $(|x| - |y|)^2 \geq 0$, d'où on tire l'inégalité classique $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, ce qui implique $-xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$. Il vient $\frac{x^2+y^2}{2} \leq x^2 + xy + y^2$. Ainsi, un élément de C vérifie $\|(x, y)\|_2 \leq 2$, ce qui prouve que C est borné. Comme C est de plus fermé (c'est l'image réciproque du fermé $]-\infty, 1]$ par l'application continue $(x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2$), C est compact.

D- D n'est pas borné. En effet, pour tout réel a, le point $(a, -a)$ est dans D car $a^2 - 8a^2 + a^2 = -6a^2 \leq 0 \leq 1$. Or, la norme infini de $(-a, a)$ est a et peut donc être choisi aussi grande que l'on veut puisque a est arbitraire. Donc D n'est pas compact.

E- Remarquons que si (x, y) est élément de E, alors $x(1 - 2x) \geq 0$. Or, $x(1 - 2x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [0, 1/2]$. Et dans ce cas, $x(1 - 2x) \leq 1/2 \times 1 = 1/2$. Ainsi, si (x, y) est élément de E, on a $x \in [0, 1/2]$ et $y \in [-\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2}]$. L'ensemble E est donc borné. On vérifie aisément qu'il est fermé, comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $(x, y) \mapsto y^2 - x(1 - 2x)$. E est donc compact.

<u>**Solution 27.**</u> Supposons pour commencer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est compact. Alors on sait que f, qui est continue sur $\mathcal{C}$, y est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $a \in \mathcal{C}$ tel que $f(a) = \inf_{x \in \mathcal{C}} f(x)$. Puisque $f(a) > 0$, le résultat est démontré.
Il suffit donc de prouver que $\mathcal{C}$ est compact. Puisque $\mathcal{C}$ est une partie de $\mathbb{R}^n$, il suffit de prouver qu'elle est bornée et fermée. Pour démontrer qu'elle est bornée, on peut choisir de munir $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_1$ (toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes). Mais, alors, si $x \in \mathcal{C}$, on a

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| = x_1 + \cdots + x_n = 1.$$

Ainsi, $\mathcal{C}$ est bornée. Pour démontrer que $\mathcal{C}$ est compact, on va poser

$$\mathcal{C}_0 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 + \cdots + x_n = 1\} \text{ et } \mathcal{C}_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_i \geq 0\},\ i \geq 1.$$

Il est clair que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_1 \cap \ldots \mathcal{C}_n$. Pour démontrer que $\mathcal{C}$ est fermé, il suffit de démontrer que chaque $\mathcal{C}_i$ est fermé, puisque l'intersection de parties fermées est fermée. Or, posons $f_0(x) = x_1 + \cdots + x_n$ et $f_i(x) = x_i$, $i \geq 1$. Toutes les fonctions f_i sont continues. De plus,

$$\mathcal{C}_0 = f_0^{-1}(\{1\}) \text{ et } \mathcal{C}_i = f_i^{-1}([0, +\infty[).$$

Ainsi, chaque $\mathcal{C}_i$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue, ce qui achève la preuve de la compacité de $\mathcal{C}$.

Solution 28. Soit M un réel tel que $M > f(0)$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que $\|x\| \geq A \implies \|f(x)\| \geq M$. Ceci entraine en particulier que :

$$f(0) \leq \inf_{\|x\| \geq A} f(x).$$

Ainsi,

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \inf_{\|x\| \leq A} f(x).$$

Maintenant, la boule fermée de centre 0 et de rayon A est fermée bornée dans $\mathbb{R}^d$, et il suffit d'appliquer le théorème qui dit qu'une fonction continue sur un fermé borné admet un minimum.
Ou alors, on raisonne sur $\arctan \circ f$ qui est bornée et atteint son maximun en $+\infty$.

Solution 29. On prend $\rho = \max(\|x\|,\ x \in K)$, qui existe car K est compact et $x \mapsto \|x\|$ est continue. Il existe donc $x \in K$, tel que $\rho = \|x\|$.

Solution 30.

1. On raisonne par l'absurde et on construit une suit $d(a_n, b_n)$ qui tend vers 0, mais B étant compact, on peut en extraire une suite $(b_{\rho(n)})$ convergente vers b et finalement $(a_{\rho(n)})$ converge aussi vers b. On en déduit $b \in A \cap B$, d'où la contradiction.
   Ou encore, on utilise la continuité de l'application $x \mapsto d(x, A)$ sur le compact B : la borne inférieure est atteinte.
   Si $A = \{(x, \arctan x),\ x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \mathbb{R} \times \{\frac{\pi}{2}\}$, alors $A \cap B = \emptyset$, mais $d(A, B) = 0$: en effet $d((n, arctann), (0, \frac{\pi}{2}))$ tend vers 0.
2. Montrons que $\mathrm{Fr}\, X \cap \mathcal{B}_F(a, R)$ est non vide : sinon on applique la question 1/ et on en déduit que $\mathcal{B}_F(a, R + \delta/2) \subset \overset{o}{X}$, puisqu'une boule fermée est compacte (dimension finie) et convexe (cf Exercice 14, 2/).
   Supposons que $\mathrm{Fr}\, X \cap \mathcal{B}_F(a, R) = \{z\}$: soit $u = a - z$ et t_u la translation de vecteur u. Alors $t_u\left(\mathcal{B}_F(z, R)\right) = \mathcal{B}_F(a, R)$: on a $\|x + u - a\| = \|x + a - z - a\| = \|x - z\|$. On en déduit que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $t_{\lambda u}\left(\mathcal{B}_F(z, R) \cap \mathcal{B}_F(a, R)\right) \subset \mathcal{B}_F(a, R)$, car une boule est convexe.
   De plus, en appliquant ce que l'on vient de faire au fermé $X \cup \mathcal{B}_F(z, R)$, on en déduit que la boule de centre a et de rayon maximal contenu dans $X \cup \mathcal{B}_F(z, R)$ vaut $R + \delta > M$ car z n'appartient pas à la frontière de $X \cup \mathcal{B}_F(z, R)$ et donc R n'est pas maximal pour $X \cup \mathcal{B}_F(z, R)$.
   Enfin, si $u' = \dfrac{\delta u}{2\|u\|}$, on pose $t_{u'}$ la translation de vecteur u'.
   Par construction $t_{u'}\left(\mathcal{B}_F(a, R)\right) = \mathcal{B}_F(a + u', R) \subset \overset{o}{X}$:
   i) en effet on a déjà montré que $t_{u'}\left(\mathcal{B}_F(z, R) \cap \mathcal{B}_F(a, R)\right) \subset \mathcal{B}_F(a, R) \setminus \{z\} \subset \overset{o}{X}$
   ii) si $x \in \mathcal{B}_F(a, R) \setminus \mathcal{B}_F(z, R)$, alors $t_{u'}(x) \notin \mathcal{B}_F(z, R)$. Pour montrer cela, on se place dans un repère orthonormé centré en z et de premier vecteur $\dfrac{u}{\|u\|}$ et on vérifie que $\|t_{u'}(x) - z\| \geq \|x - z\| > r$ (On utilise ici et seulement ici la structure euclidienne pour la réciproque ; en fait, je pense que c'est encore vrai sur un espace vectoriel normé de dimension finie). Or $t_{u'}(x) \in \mathcal{B}_F(a, R) \cup \overset{o}{X}$, donc $t_{u'}(x) \in \overset{o}{X}$.
   Donc, $\mathcal{B}_F(a + u', R) \cap \mathrm{Fr}\, X = \emptyset$. Ce qui contredit la maximalité de R. Faire un dessin est indispensable piur bien comprendre ce que l'on a fait.

Solution 31.

— $(i) \implies (ii)$: Soit M tel que $y \in B \implies |y| \leq M$. Si $x \in f^{-1}(B)$ et $\|x\| > R$, par (i), on aurait $|f(x)| > M$, ce qui est impossible puisque $f(x) \in B$.

— $(ii) \implies (iii)$: K étant fermée bornée, elle est fermée bornée. Ceci entraîne que $f^{-1}(K)$ est fermé, car l'image réciproque d'un fermé par une application continue est fermé, et que $f^{-1}(K)$ est borné, par (ii). Les compacts de $\mathbb{R}^n$ étant exactement les fermés bornés, on a le résultat.

— $(iii) \implies (i)$: Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors, il existe M et une suite (x_n) de $\mathbb{R}^n$ telle que $\|x\| \geq n$ et $|f(x)| \leq M$. Mais alors l'image réciproque de $[-M, M]$ contient la suite (x_n), elle n'est pas bornée et n'est par conséquent pas fermée bornée.

Solution 32. Soit un espace vectoriel normé E de dimension finie ou non, et soit F un sous-espace de dimension finie. Soit x_n une suite de vecteurs éléments de F, convergeant vers $x \in E \setminus F$. Soit $G = F + \text{Vect}(x)$, qui est de dimension finie. La projection sur F parallèlement à $\text{Vect}\,(x)$ est un endomorphisme de G donc est continu. On en déduit que son noyau F est fermé dans G, donc si une suite d'élments de F converge dans G, sa limite appartient à F. Par l'absurde, la limite est dans F. Par caractérisation des fermés par les suites, F est une fermé.

Solution 33.

1. La boule unité fermée est une partie fermée car $B_F(O,1) = \varphi^{-1}([0,1])$ avec $\varphi : E \to E$, $x \mapsto \|x\|$ une application 1-lipŝchitzienne, donc continue et $[0,1]$ un fermé.
   Elle est bornée par définition.
   Si $x \in B_F(0,1)$, alors $\|-x\| = \|x\| \leq 1$ et $-x \in B_F(0,1)$. La boule unité est symétrique par rapport à 0.
   Enfin, la boule unité est une partie convexe (cf cours).
2. On veut montrer ici la réciproque. On suppose, $\rho > 0$, $B(0,\rho) \subset K$. Pour $x \neq 0$ fixé, $A_x = \{r > 0,\ x/r \in K\}$ est non vide car contient $\dfrac{2\|x\|}{\rho}$ et minorée (par 0), donc la borne inférieure existe. De plus, $J_K(x) \neq 0$ car sinon $\lim\limits_{t \to 0^+, x/t \in K} \dfrac{\|x\|}{r} = +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse K bornée. Ce qui montre $J_K(x) = 0$ ssi $x = 0$.
   De plus, $J_k(-x) = J_K(x)$ car K est symétrique par rapport à 0 et par définition, $J_K(\lambda x) = \lambda J_K(x)$ pour $\lambda > 0$. On en déduit $J_K(\lambda x) = |\lambda| J_K(x)$.
   Si $x \in K$, alors $J_k(x) \leq 1$. Réciproquement, si $J_k(x) \leq 1$ et $x \neq 0$, alors il existe une suite (r_n) qui tend vers $J_K(x)$ telle que $\dfrac{x}{r_n} \in K$. Mais K est fermée, donc $\dfrac{1}{J_K(x)} x \in K$.Mais $0 \in K$, donc le segment $[0, \dfrac{1}{J_K(x)} x] \subset K$ puisque K est convexe. Comme par hypothèse, $\dfrac{1}{J_K(x)} \geq 1$, on en déduit que $x \in K$.
   Ceci montre que K est bien la boule unité pour la "norme" J_K.
   Pour montrer que J_K est bien une norme, il reste à vérfier l'inégalité triangulaire.
   On a $\forall x, y \in E \setminus \{0\}$,
   $$\frac{1}{J_K(x) + J_K(y)}(x+y) = \frac{J_K(x)}{J_K(x) + J_K(y)} \left(\frac{x}{J_K(x)} \right) + \frac{J_K(y)}{J_K(x) + J_K(y)} \left(\frac{y}{J_K(y)} \right) \in K$$
   puisque K est convexe, $\dfrac{x}{J_K(x)} \in K$ et $\dfrac{y}{J_K(y)} \in K$. En effet,on pose $t = \dfrac{J_K(y)}{J_K(x) + J_K(y)} \in [0,1]$ dans la définition de la convexité. Par définition de la borne inférieure, on en déduit
   $$J_K(x+y) = \inf\{r > 0,\ \frac{x}{r} \in K\} \leq J_K(x) + J_K(y)$$
   c'est-à-dire l'inégalité triangulaire.
   On a donc montré que J_k est une norme et K est sa boule unité fermée.

Solution 34.

1. Remarquons que, puisque $|\cos x| \leq 1$ et que $|1/(1+x^2)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité des accroissements finis nous dit que, pour tous $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$|\sin(u) - \sin(v)| \leq |u - v| \text{ et } |\arctan(u) - \arctan(v)| \leq |u - v|.$$
Ainsi, on obtient
$$\begin{aligned}
\|f(x,y) - f(x',y')\|_1 &\leq \frac{1}{4}|\sin(x+y) - \sin(x'+y')| + \frac{2}{3}|\arctan(x-y) - \arctan(x'-y')| \\
&\leq \frac{1}{4}|(x+y) - (x'+y')| + \frac{2}{3}|(x-y) - (x'-y')| \\
&\leq \frac{1}{4}|(x-x') + (y-y')| + \frac{2}{3}|(x-x') - (y-y')| \\
&\leq \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right)\left(|x-x'| + |y-y'|\right) \\
&\leq \frac{11}{12}\|(x,y) - (x',y')\|_1
\end{aligned}$$
2. La fonction f est contractante, et $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie. On munit $\mathbb{R}^2$ de de la norme $\| \ \|_1$. D'après le théorème du point fixe, il existe un unique couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x,y) = f(x,y)$. Autrement dit, le système admet une unique solution.
3. L'utilisation de la norme $\|.\|_\infty$ ne convenait pas, car f n'est pas contractante lorsqu'on utilise cette norme. En effet, prenons $x = y \geq 0$, et proche de 0. On a alors
$$\|f(x,x) - f(0,0)\|_\infty \geq \frac{2}{3}\big(\arctan(2x) - \arctan(0)\big) \geq \frac{4x}{3(1+4x^2)}$$
(toujours d'après l'inégalité des accroisssements finis). Si f était k-contractante, avec $k \in [0,1[$, on aurait :
$$\frac{4x}{3(1+4x^2)} \leq \|f(x,x) - f(0,0)\|_\infty \leq k\|(x,x) - (0,0)\|_\infty \leq kx.$$
Faisant tendre x vers 0, on obtiendrait $\frac{4}{3} \leq k$, une contradiction.

Solution 35. Si C est fermé, soit $x_0 \in C$. Pour tout $y \in E$, on pose $B_y = \mathcal{B}_F(x_0, \|y - x_0\|)$ et on a $d(y,C) = d(y, B_y \cap C)$.
Comme C est fermée et B_y compacte, $B_y \cap C$ est encore compacte. L'application $x \mapsto d(y,x)$ est continue, atteint son minimum sur le compact $B_y \cap C$. On en déduit l'existence d'un $x \in B_y \cap C$ tel que $d(y,x) = d(y,C)$.
Supposons que pour $y \in E$, il existe x_1 et $x_2 \in C$ tels que $d(y,C) = d(y,x_1) = d(y,x_2)$. On pose $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ et on vérifie facilement que
$$\langle y - x | x_2 - x_1 \rangle = \left\langle \frac{1}{2}(y - x_1) + \frac{1}{2}(y - x_2) | (x_2 - y) + (y - x_1) \right\rangle = \frac{1}{2}\left(\|y - x_1\|^2 - \|x_2 - y\|^2\right) = 0$$
Comme $x - x_1 = \dfrac{1}{2}(x_2 - x_1)$, on a $(y - x | x - x_1) = 0$ et par Pythagore
$$\|y - x_1\|^2 = \|y - x\|^2 + \|x - x_1\|^2.$$
Par définition de la distance $d(y,C)$, on en déduit que $x = x_1$ et donc $x_1 = x_2$, d'où l'unicité.
Réciproquement, si pour tout $y \in E$, il existe un unique $x \in C$ tel que $d(y,C) = d(y,x)$. Comme pour tout $y \in \overline{C}$, $d(y,C) = 0$, on en déduit que $\overline{C} = C$ et C est fermé.
Supposons que C n'est pas convexe : il existe x_1, $x_2 \in C$ tel que $[x_1, x_2] = \{tx_2 + (1-t)x_1, t \in [0,1]\}$ n'est pas inclus dans C.
Soit $M(t_0) = t_0 x_2 + (1 - t_0)x_1 \notin C$. Alors $d(M_0, C) = \delta = d(M_0, z_0) > 0$ avec $z_0 \in C$; il existe donc une boule fermée $B = \mathcal{B}_F(M_0, \dfrac{\delta}{2})$ telle que $B \cap C = \emptyset$.

Comme dans l'exercice 18, on montre que le sup des rayons d'une boule fermé dont le centre appartient au segment $[x_1, x_2]$ donne une boule fermée qui rencontre C en au moins deux points, ce qui contredit l'unicité du "projeté" pour ce centre. Comme dans l'exercice 18, la réciproque devrait être encore vriae sur un espace vectoriel normé de dimension finie (pas seulement euclidien).

__Solution 36.__ Il est clair que l'on définit une norme. L'application linéaire $\mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ est linaire en dimension finie, donc continue. Elle l'est pour toute norme et donc lipschitzienne.

__Solution 37.__ f n'a pas de point fixe car si $f(x) = x$ alors $x \in A$ ou $x \in \mathbb{R} \setminus A$ et dans les deux cas on contredit l'hypothèse. On en déduit que $f(x) - x$ est de signe constant non nul.
Si $f(x) > x$, alors comme A est bornée, il existe une suite $(x_n) \in (\mathbb{R} \setminus A)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim x_n = +\infty$, donc $\lim f(x_n) = +\infty$, mais $f(x_n) \in A$ bornée, impossible. De même si $f(x) < x$ en prenant une suite qui tend vers $-\infty$.

__Solution 38.__

1. Soit (u_n) une suite d'éléments de S convergeant vers Id_E. Comme u_n est une symétrie, $u_n = id_E$ ssi $\mathrm{tr} u_n = n$. La fonction trace étant continue et à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc est constante à partir d'un certain rang. On en déduit que Id_E est un point isolé.
2. Le même raisonnement montre que $-Id_E$ est un point isolé. Soit $u \in S$, $u \neq \pm Id_E$. Soit e_1 un vecteur propre associé à la valeur propre 1 et e_2 associé à la valeur propre -1 que l'on complète une base de vecteurs de u dans $E_1(u)$ puis dans $E_{-1}(u)$. Relativement à cette base, la matrice de u s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & I_r & \\ & & & -I_{n-r-2} \end{pmatrix}$. On pose $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ -\alpha & -1 & & \\ & & I_r & \\ & & & -I_{n-r-2} \end{pmatrix}$. La suite tend vers u et u n'est pas un point isolé.
3. S est fermée comme l'image réciproque de $\{0\}$ par $u \mapsto u^2 - id_E$. Mais n'est pas bornée comme le montre l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ \alpha & -1 & \\ & & I_{n-2} \end{pmatrix}$ en faisant tendre α vers $+\infty$. On aurait pu se limiter aux symétries orthogonales.

__Solution 39.__ Pour montrer l'unicité, on suppose que l, $l' \in K$ sont des points fixes, et

$$\|l - l'\| \underset{f(l)=l,\ f(l'))l'}{=} \|f(l) - f(l')\| < \|l - l'\|.$$

On en déduit que $l = l'$, d'où l'unicité.
Pour l'existence, l'application $\varphi : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x) - x)\|$ est continue. Donc admet un minimum $m = \|f(x_0) - x_0)\|$. Si $f(x_0) \neq x_0$, par hypothèse $\|f(f(x_0)) - f(x_0)\| < m$, ce qui contredit la définition du minimum. Donc $f(x_0) = x_0$.

__Solution 40.__

1. Un ensemble non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure
2. Soit $z \in F$ et on pose $r\|z - a\|$. Ainsi $K = \mathcal{B}(a, r) \cap F$ est un fermé borné de F, de dimension finie, donc c'est un compact. L'image de K par la fonction continue $x \mapsto \|x - a\|$ admet un minimum $d(a, y)$. Et y apprtient à F, c'est un minum sur F.
3. On pose $b = \dfrac{a - y}{\|a - y\|}$. Pour tout $\dfrac{z}{\|a - y\|} \in F$, on a
$$\|b - \frac{z}{\|a - y\|}\| = \frac{\|a - y - z\|}{\|a - y\|},$$
dont on déduit $d(b, f) = 1$ et $\|b\| = 1$.
4. Si E est de dimension infinie, il existe une famille libre dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \mathrm{vect}(e_1, \cdots, e_n)$.
En appliquant le 3/ à F_n, on en déduit l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tous $n > k$, $\|a_k - a_n\| \geq 1$. Cette suite n'admet pas de valeurs d'adhérence. Cette suite est à valeurs dans la boule unité fermée, donc cette boule fermée n'est pas compacte.