Chapitre XII Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Table des matières

Dans ce chapitre, on se place dans un espace euclidien E : un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie n muni d'un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ (et *de facto* de la norme associée $\|\cdot\|$).

XII.1 Qu'est-ce qu'une matrice orthogonale ?

Définition 1
On dit qu'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si $A^T \cdot A = I_n$.

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}(n)$ et est appelé le **groupe orthogonal** d'ordre n.

Remarque 2 — *Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut ± 1.*

Preuve — $1 = \det(I_n) = \det(A^T \cdot A) = \det(A^T) \cdot \det(A) = [\det(A)]^2$. □

Toute matrice orthogonale est inversible car :

$$A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \implies \det(A) = \pm 1 \implies \det(A) \neq 0 \implies A \in GL_n(\mathbb{R}).$$

On en déduit que :

$$\boxed{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff A^T \cdot A = I_n \iff A^T = A^{-1} \iff A \cdot A^T = I_n.}$$

Le sous-ensemble des matrices orthogonales dont le déterminant vaut $+1$ est noté $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{SO}(n)$ et est appelé le ***groupe spécial orthogonal*** *d'ordre n : $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 3 — *Montrer que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, qui est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Vérifier par ailleurs que ces ensembles sont stables par transposition.

Proposition 4
Une matrice est orthogonale si, et seulement si, ses colonnes (ou ses lignes) forment une $b.o.n.$ de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique).

Autrement dit : une matrice est orthogonale si, et seulement si, c'est la matrice de passage d'une $b.o.n.$ de E vers une $b.o.n.$ de E.

Preuve — On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$M^T \cdot M = I_n \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle C_i | C_j \rangle = \delta_{i,j} \Leftrightarrow (C_1, \dots, C_n) \text{ est une base orthonormée.}$$

En outre, A est orthogonale si, et seulement si, A^T l'est. Or la transposition change les colonnes en lignes. □

MÉTHODE 5 — *En particulier, soit A une matrice 3×3 de colonnes C_1, C_2 et C_3.*
Il suffit de vérifier que :

— *(C_1, C_2) est une famille orthonormée et $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$ pour montrer que $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$;*

— *(C_1, C_2) est une famille orthonormée et $C_1 \wedge C_2 = +C_3$ pour montrer que $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.*

EXERCICE 6 — *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Étudier les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin(\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ et \ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

XII.2 Isométries vectorielles

DÉFINITION 7
Soient un espace euclidien E et une application $f : E \to E$. On dit que f est une **isométrie vectorielle** si f conserve le produit scalaire :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \langle f(u) | f(v) \rangle = \langle u | v \rangle.$$

L'ensemble des isométries vectorielles de E est noté $\mathcal{O}(E)$. Une isométrie vectorielle est aussi appelée un *automorphisme orthogonal*, à cause des propositions 8 et 10.

PROPOSITION 8
Toute isométrie vectorielle de E est linéaire et bijective.

Autrement dit : toute isométrie vectorielle de E est un automorphisme de E.

Mieux : l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries de E est un sous-groupe du groupe $\mathcal{GL}(E)$ des automorphismes de E.

Preuve — Soit f une isométrie, soient u et v deux vecteurs de E, soient a et b dans $\mathbb{R}$. On va montrer que la norme du vecteur $f(au + bv) - af(u) - bf(v)$ est nulle, ce qui impliquera que ce vecteur est nul et donc que f est linéaire :

$$\begin{aligned} ||f(au + bv) - af(u) - bf(v)||^2 &= \langle f(au + bv) - af(u) - bf(v) | f(au + bv) - af(u) - bf(v) \rangle \\ &= \langle f(au + bv) | f(au + bv) \rangle - 2\langle f(au + bv) | af(u) + bf(v) \rangle \\ &\quad + \langle af(u) + bf(v) | af(u) + bf(v) \rangle \\ &= (\text{on développe et on utilise que } f \text{ conserve le produit scalaire}) = 0 \end{aligned}$$

Comme f est linéaire et que E est de dimension finie, il suffit de montrer que f est injective pour prouver que f est bijective : $\forall x \in E, \ f(x) = 0_E \implies \langle f(x) | f(x) \rangle = 0 \implies \langle x | x \rangle = 0$ (car f conserve le produit scalaire). Cela implique que $x = 0_E$ (car le produit scalaire est défini).

Enfin, les isométries de E foment un groupe. En effet :

— l'ensemble des isométries de E n'est pas vide car id_E conserve le produit scalaire ;

— la composée $f \circ g$ de deux isométries f et g est une isométrie car $\forall (u, v) \in E^2, \ \langle f(g(u)) | f(g(v)) \rangle = \langle g(u) | g(v) \rangle = \langle u | v \rangle$;

— la réciproque d'une isométrie f existe (car on a prouvé qu'une isométrie est bijective) et est une isométrie car $\forall (u, v) \in E^2, \ \langle f^{-1}(u) | f^{-1}(v) \rangle = \langle f(f^{-1}(u)) | f(f^{-1}(v)) \rangle = \langle u | v \rangle$.

□

THÉORÈME 9 (Caractérisations d'une isométrie)
Soient un espace euclidien E et une application $f : E \to E$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f conserve le produit scalaire ;
2. f est linéaire et conserve la norme : $\forall u \in E, ||f(u)|| = ||u||$;
3. f est linéaire et transforme une $b.o.n.$ de E en une $b.o.n.$ de E.

Preuve —

2⇒1

$$\begin{aligned}\langle f(u)|f(v)\rangle &= \frac{1}{2}\left(||f(u)+f(v)||^2 - ||f(u)||^2 - ||f(v)||^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(||f(u+v)||^2 - ||f(u)||^2 - ||f(v)||^2\right) && \text{par linéarité} \\ &= \frac{1}{2}\left(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2\right) && \text{par hypothèse} \\ &= \langle u|v\rangle\end{aligned}$$

1⇒3 L'application f est linéaire d'après la proposition 8. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée ; f conserve le produit scalaire, d'où

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \langle f(e_i)|f(e_j)\rangle = \langle e_i|e_j\rangle = \delta_{i,j}$$

donc $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une base orthonormée.

3⇒2 Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée. Si $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une base orthonormée, alors :

$$\forall u = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, \quad \|f(u)\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^n x_i f(e_i)\right\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\|^2 = \|u\|.$$

□

Proposition 10 (Caractérisation matricielle d'une isométrie)

Soit un espace euclidien E de dimension n :

f est une isométrie de E	*ssi*	la matrice de f, dans une b.o.n., est orthogonale.
Autrement dit : $f \in \mathcal{O}(E)$	$\Longleftrightarrow$	$[f]_{b.o.n.} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Preuve — Les colonnes de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ de f dans la *b.o.n.* $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ forment une *b.o.n.* si, et seulement si, $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une *b.o.n.*. D'après le théorème 9, c'est le cas si, et seulement si, f est une isométrie. □

XII.3 Endomorphismes autoadjoints

Définition 11

On dit qu'un endomorphisme $f : E \to E$ est **autoadjoint** si :

$$\forall (u,v) \in E^2, \quad \langle f(u)|v\rangle = \langle u|f(v)\rangle.$$

Un endomorphisme autoadjoint est ainsi appelé à cause de la proposition 15. Et est aussi appelé un endomorphisme *symétrique* à cause de la proposition suivante. L'ensemble des endomorphismes autoadjoints est noté $\mathcal{S}(E)$.

Proposition 12

Un endomorphisme f est autoadjoint	*ssi*	la matrice de f, dans une b.o.n., est symétrique
Autrement dit : $f \in \mathcal{S}(E)$	$\Longleftrightarrow$	$[f]_{b.o.n.} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Preuve — Soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = \langle e_i|f(e_j)\rangle$ car $\mathcal{B}$ est orthonormée. Pour la même raison, $a_{ji} = \langle e_j|f(e_i)\rangle = \langle f(e_i)|e_j\rangle$ par symétrie du produit scalaire.

$$\begin{aligned} f \text{ est autoadjoint} &\iff \forall (u,v) \in E^2,\ \langle f(u)|v\rangle = \langle u|f(v)\rangle \\ &\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle f(e_i)|e_j\rangle = \langle e_i|f(e_j)\rangle \\ &\iff a_{ji} = a_{ij}\end{aligned}$$

□

Exercice 13 — *Soient E un espace euclidien et F un sev de E. La projection orthogonale sur F est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$. Montrer que :*

1. *si f est un endomorphisme autoadjoint, alors $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux et supplémentaires ;*
2. *p est une projection orthogonale si, et seulement si, p est un projecteur autoadjoint.*

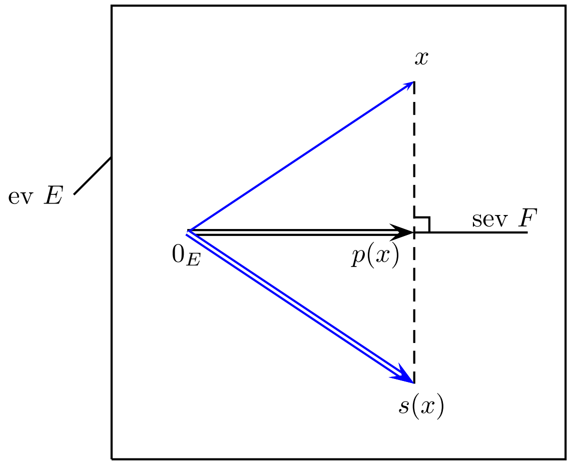

Figure XII.1 – Projection et symétrie orthogonales

Proposition-Définition 14 (Interprétation géométrique de la transposée)
Si f est un endomorphisme d'un espace euclidien E, alors il existe un unique endomorphisme de E, noté f^* et appelé l'**adjoint** de f, tel que :

$$\forall (u,v) \in E^2, \quad \langle f^*(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle.$$

Si A est la matrice de f dans une *bon* de E, alors A^T est la matrice de f^* dans cette *bon* : $[f^*]_{bon} = [f]_{bon}^T$.

Preuve — On fixe le vecteur u et l'endomorphisme f. L'application $\varphi : E \to \mathbb{R},\ v \mapsto \langle u, f(v)\rangle$ est une forme linéaire. D'après le théorème de représentation de Riesz (théorème 29 du chapitre VIII), il existe donc un unique vecteur, qu'on décide de noter $f^*(u)$ tel que : $\forall v \in E,\ \varphi(v) = \langle f^*(u), v\rangle$.

L'application $f^* : E \to E,\ u \mapsto f^*(u)$ est linéaire car, pour tous $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_1,u_2) \in E^2$, $\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, f(v)\rangle$ est égal :
- d'une part, à $\alpha_1\langle u_1, f(v)\rangle + \alpha_2\langle u_2, f(v)\rangle = \langle \alpha_1 f^*(u_1) + \alpha_2 f^*(u_2), f(v)\rangle$ par linéarité à gauche du produit scalaire ;
- d'autre part, à $\langle f^*(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2), v\rangle$ par définiton de l'adjoint.

Par unicité, les vecteurs $\alpha_1 f^*(u_1) + \alpha_2 f^*(u_2)$ et $f^*(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)$ sont égaux.

Enfin, si on se place dans une base $\mathcal{B}$ de E, alors l'endomorphisme f est représenté par une matrice carrée A et les vecteurs u et v par des vecteurs colonnes X et Y. Si, de plus, cette base $\mathcal{B}$ est orthonormée, alors $\langle f^*(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle = X^T(AY) = (A^TX)^TY$. Ceci est vrai pour tout vecteur v (*i.e.* tout vecteur colonne Y), d'où $A^TX = [f^*(u)]_{\mathcal{B}}$. Et cela est vrai pour tout vecteur u (*i.e.* tout vecteur colonne X), donc la matrice de f^* dans la base $\mathcal{B}$ est A^T. □

Soient f et g deux endomorphismes de E, soient α et β deux réels. De la définition de l'adjoint (ou des propriétés de la transposée), il résulte que :

$$(f\circ g)^* = g^*\circ f^* \quad , \quad (f^*)^* = f \quad \text{et} \quad (\alpha f + \beta g)^* = \alpha f^* + \beta g^*,$$
$$(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T \quad , \quad (A^T)^T = A \quad \text{et} \quad (\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T.$$

Les applications $\mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E),\ f \mapsto f^*$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A \mapsto A^T$ sont donc des applications linéaires involutives.

Proposition 15
Soit f un endomorphisme d'un espace eucldien E :
(i) f est autoadjoint si, et seulement si, $f^* = f$;
(ii) f est une isométrie si, et seulement si, $f^* = f^{-1}$.

Exercice 16 — *Soient E un espace euclidien et F un sev de E. La symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$. Montrer que s est une symétrie orthogonale si, et seulement si, s est une isométrie autoadjointe.*

XII.4 Stabilité de l'orthogonal

Endomorphismes autoadjoints et isométries vectorielles vérifient une même propriété : la stabilité de l'orthogonal.

Proposition 17
Soient f un endomorphisme autoadjoint de E et F un *sev* de E.

Si F est stable par f, alors $F^\perp$ est aussi stable par f.

Preuve —

Soit $u \in F^\perp$. On veut montrer que $f(u) \in F^\perp$. Soit $v \in F$:

$$\begin{aligned} \langle f(u)|v\rangle &= \langle u|f(v)\rangle \text{ car } f \text{ est symétrique} \\ &= 0 \text{ car } f(v) \in F \text{ si } F \text{ est stable par } f. \end{aligned}$$

Cela est vrai pour tout $v \in F$, donc $f(u) \in F^\perp$. □

Proposition 18
Soient f une isométrie vectorielle de E et F un *sev* de E.

Si F est stable par f, alors $F^\perp$ est aussi stable par f.

Preuve — Si F est stable, alors $f(F) \subset F$. De plus, f est bijective. D'où $\dim f(F) = \dim F$. Donc $f(F) = F$.

Soit $u \in F^\perp$. On veut montrer que $f(u) \in F^\perp$. Soit $v \in F$: il existe $v_0 \in F$ tel que $f(v_0) = v$. D'où

$$\langle f(u)|v\rangle = \langle f(u)|f(v_0)\rangle = \langle u|v_0\rangle = 0$$

car $u \in F^\perp$ et $v_0 \in F$. Cela est vrai pour tout $v \in F$, donc $f(u) \in F^\perp$. □

Proposition 19
Un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par f^*.

Preuve — Supposons que F est stable par f. Soient $x \in F$ et $y \in F^\perp$. On veut montrer que $f^*(y)$ est orthogonal à x :

$\langle f^*(y), x\rangle = \langle y, f(x)\rangle$ par définition de l'adjoint. Or $f(x) \in F$ par hypothèse. Donc $f(x) \perp y$ car $y \in F^\perp$.

Pour la réciproque, on procède de même. Ou on constate, en notant $G = F^\perp$ et $g = f^*$, que l'on vient de montrer que : G stable par $g \implies G^\perp$ stable par g^*. Or $G^\perp = F$ et $g^* = f$. □

XII.5 Le théorème spectral

Lemme 20
Soit f un endomorphisme autoadjoint de E.

1. Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux (autrement dit : si deux vecteurs propres sont associés à des valeurs propres distinctes, alors ils sont orthogonaux).
2. Les valeurs propres de f sont toutes réelles : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f) \subset \mathbb{R}$.

Preuve —

1. Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres de f distinctes et E_1 et E_2 les *sep* qui leur sont respectivement associés. Montrons qu'ils sont orthogonaux. Soient $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Alors $\lambda_1\langle x_1|x_2\rangle = \langle f(x_1)|x_2\rangle = \langle x_1|f(x_2)\rangle = \lambda_2\langle x_1|x_2\rangle$. Or $\lambda_1 \neq \lambda_2$, d'où $\langle x_1|x_2\rangle = 0$ donc $E_1 \perp E_2$: les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

2. Soient λ une valeur propre (complexe) de f et x un vecteur propre associé à λ. Pour raisonner avec les matrices, on se place dans une *b.o.n.* $\mathcal{B}$ de E : soient A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et X le vecteur colonne représentant x dans la même base : $AX = \lambda X$, d'où ${}^t\overline{X}AX = \lambda {}^t\overline{X}X$. En transposant et en conjuguant, on obtient : ${}^t\overline{X}{}^t\overline{A}X = \overline{\lambda}{}^t\overline{X}X$. Comme A est symétrique réelle, on a ${}^t\overline{X}AX = \overline{\lambda}{}^t\overline{X}X$ d'où $\lambda {}^t\overline{X}X = \overline{\lambda}{}^t\overline{X}X$. Or ce n'est pas ${}^t\overline{X}X$ qui est nul, d'où $\lambda = \overline{\lambda}$, donc λ est réel.

□

> Théorème 21 (Théorème spectral)
> Un endomorphisme f d'un espace euclidien E est autoadjoint si, et seulement si, il est diagonalisable dans une base orthonormée.
>
> *Autrement dit :* si, et seulement si, il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f.
>
> *Ou encore :* si, et seulement si, E est la somme orthogonale des sous-espaces propres de f.

Preuve — Suppososn que f est autoadjoint. Et montrons par récurrence sur n (la dimension de E) la propriété : « il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ formée de vecteurs propres de f ».

Initialisation : Pour $n = 1$, soit $v \in E$ non nul, alors la base $(\frac{v}{||v||})$ convient.

Hérédité : Soit $n \geq 2$. On suppose la propriété vraie au rang $n-1$ et on veut la montrer au rang n. Soit e_1 un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ. (Il existe au moins une valeur propre complexe de f et celle-ci est réelle d'après le lemme.) Quitte à diviser e_1 par sa norme, on peut supposer qu'il est de norme 1. Ce sera le premier vecteur de la base. $\mathrm{Vect}(e_1)$ est stable par f donc $\mathrm{Vect}(e_1)^\perp$ aussi (proposition 17). On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathrm{Vect}(e_1)^\perp$, on en trouve une base orthonormée $\mathcal{B}' = (e_2, \ldots, e_n)$ formée de vecteurs propres de f restreinte à $\mathrm{Vect}(e_1)^\perp$. Donc $(e_1, e_2 \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ formée de vecteurs propres de f.

Réciproquement : si $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ est une *bon* de E formée de vecteurs propres de f, alors (en notant λ_i la valeur propre associée à chaque vecteur ε_i) : pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle \varepsilon_i, f(\varepsilon_j)\rangle = \lambda_j \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = \lambda_j \delta_{ij}$ est donc égal à $\langle f(\varepsilon_i), \varepsilon_j\rangle$ et, par bilinéarité : $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, f(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle$, donc f est autoadjoint. □

> Corollaire 22 (Version matricielle du théorème spectral)
> Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle, alors il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = P^TAP$ est une matrice diagonale.
>
> Autrement dit : toute matrice symétrique réelle est orthogonalement diagonalisable.

Preuve — Soit f l'endomorphisme représenté par A dans une base orthonormée $\mathcal{B}$. Cet endomorphisme f est autoadjoint, d'où il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice D de f est diagonale d'après le théorème spectral. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors :

- la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale ;
- la matrice P est orthogonale ($P^{-1} = P^T$) car c'est la matrice de passage d'une base orthonormée vers une base orthonormée.

□

> Définition 23
> On dit qu'un endomorphisme autoadjoint $f \in \mathcal{S}(E)$ d'un espace euclidien E est :
>
> (i) **positif** si $\forall x \in E,\ \langle x, f(x)\rangle \geq 0$;
>
> (ii) **défini positif** s'il est positif et $\forall x \in E,\ [\langle x, f(x)\rangle = 0 \implies x = 0_E]$.
> Autrement dit : si $\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ \langle x, f(x)\rangle > 0$.

On dit de même qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est :

(i) **positive** si $\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}),\ X^TMX \geq 0$;

(ii) **définie positive** si elle est positive et $\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}),\ \left[X^TMX = 0 \implies X = 0\right]$.
Autrement dit : si $\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})}\},\ X^TMX > 0$.

On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs et $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs. De même, $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Théorème 24
Un endomorphisme autoadjoint est :

(i) positif si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives ;

(ii) défini positif si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

De même pour une matrice symétrique. Autrement dit :

$$\begin{array}{llll} f \in \mathcal{S}^+(E) & \iff f \in \mathcal{S}(E) & \text{et} & \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+ \\ f \in \mathcal{S}^{++}(E) & \iff f \in \mathcal{S}(E) & \text{et} & \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^* \\ M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) & \iff M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \text{et} & \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+ \\ M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \iff M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \text{et} & \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^* \end{array}$$

Preuve — Sans le théorème spectral dans un sens : supposons que f est autoadjoint et positif. Alors, pour tout $x \in E$, $\langle x, f(x)\rangle \geq 0$. En particulier, si λ est une valeur propre de f, alors il existe un vecteur $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = \lambda x$. Pour ce vecteur, $\langle x, f(x)\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \lambda\|x\|^2 \geq 0$. Or $\|x\|^2 > 0$ car $x \neq 0_E$. D'où $\lambda \geq 0$.

De même, si f est défni positif, alors $\langle x, f(x)\rangle = \lambda\|x\|^2 > 0$, donc $\lambda > 0$ car $\|x\|^2 > 0$.

Avec le théorème spectral dans l'autre sens : supposons que f est autoadjoint et que toutes ses valeurs propres sont positives. Grâce au théorème spectral, on se place dans une base adaptée, une *bon* $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ formée de vecteurs propres : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$. Tout vecteur $x \in E$ se décompose dans cette base : $x = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n$. On calcule, en utilisant le fait que la base est orthonormée : $\boxed{\langle x, f(x)\rangle = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.}$ Par hypothèse, chaque λ_i est positif, donc $\langle x, f(x)\rangle \geq 0$ car c'est une somme de réels positifs.

Supposons maintenant que toutes les valeurs propres sont strictement positives :

— (première rédaction) si $x \neq 0_E$, alors il existe au moins une coordonnée x_i non nulle. D'où $\lambda_i x_i^2 > 0$. On y ajoute des réels positifs pour obtenir $\langle x, f(x)\rangle$, qui est donc strictement positif.

— (seconde rédaction) si la somme de termes positifs $\langle x, f(x)\rangle$ est nulle, alors chaque terme est nul : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i x_i^2 = 0$. Or chaque λ_i est non nul par hypothèse, d'où chaque x_i est nul, donc $x = 0_E$.

□

XII.6 Rotations & réflexions

Définition 25
Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie. On dit que deux bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ de E ont la même **orientation** si le déterminant de la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est strictement positif.

Pour orienter l'espace vectoriel E, on choisit une base $\mathcal{B}_0$ de E. On dit alors qu'une base $\mathcal{B}$ est directe si $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ ont la même orientation, indirecte sinon.

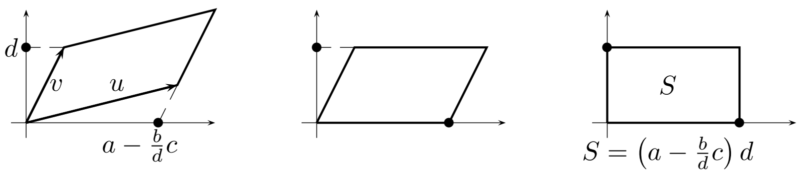

Figure XII.2 – Aire d'un parallélogramme

Exemple 26 — *On oriente le plan $\mathbb{R}^2$ en décidant que la base canonique $\mathcal{B}_0 = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est directe, puis on munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique : $\mathcal{B}_0$ est alors une base orthonormée directe (*bond*) de $\mathbb{R}^2$. Soient deux vecteurs $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = c\vec{\imath} + d\vec{\jmath}$. Le déterminant*

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

possède :

- *un signe (s'il est strictement positif, alors* $(\vec{u},\vec{v})$ *est une base directe ; s'il est strictement négatif, alors* $(\vec{u},\vec{v})$ *est une base indirecte ; s'il est nul, alors* $(\vec{u},\vec{v})$ *n'est pas une base car* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont liés) ;*
- *une valeur absolue, égale à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$*.*

Les trois parallélogrammes de la figure XII.2 ont en effet la même aire, égale à

$$|\det(\vec{u},\vec{v})| = |ad - bc|.$$

Exemple 27 — *On oriente l'espace* $\mathbb{R}^3$ *en décidant que la base canonique* $\mathcal{B}_0 = (\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ *est directe.*

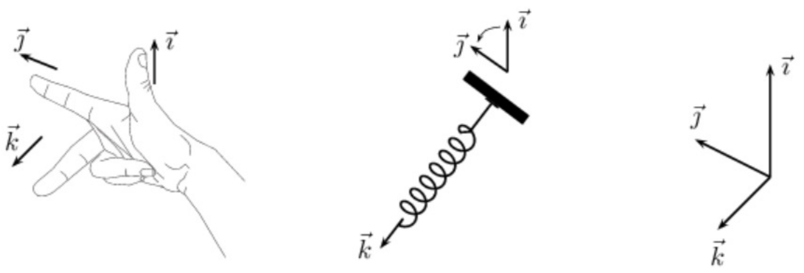

Figure XII.3 – La règle de la main droite (ou du tire-bouchon)

> Définition 28
> Soit E un espace euclidien de dimension n. On dit que :
> (i) f est une **rotation** si f est une isométrie de déterminant $+1$, autrement dit : si $[f]_{b.o.n.} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$;
> (ii) f est une **réflexion** si f est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

Remarque 29 — *Soit* E *un espace euclidien de dimension* n*.*

1. *Un endomorphisme de* E *est :*
   - *une isométrie si, et seulement si, il transforme une* bon *en une* bon *;*
   - *une rotation si, et seulement si, il transforme une* bond *en une* bond*.*
2. *Les rotations de* E *forment un groupe, noté* $\mathcal{SO}(E)$*, qui est un sous-groupe du groupe* $\mathcal{O}(E)$ *des isométries de* E*. De même que* $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ *est un sous-groupe de* $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$*.*
3. *Si* f *est une réflexion par rapport à un hyperplan* H *de* E*, alors sa matrice dans une base adaptée à la somme directe* $H \oplus H^\perp$ *s'écrit* $\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$*. Le déterminant d'une réflexion est donc toujours égal à* -1*. Et la composée de deux réflexions est donc une rotation.*

> Théorème 30 (Les isométries du plan)
> Une matrice appartient à $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, elle est de la forme :
>
> $$\text{ou bien} \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{ou bien} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$
>
> Son déterminant vaut $+1$ dans le premier cas, -1 dans le second.

Preuve — Une matrice M appartient à $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, ses colonnes C_1 et C_2 forment une *bon* :

$$\begin{cases} \|C_1\| = 1 \iff \exists\theta \in \mathbb{R},\ C_1 = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \ ; \\ \|C_2\| = 1 \iff \exists\varphi \in \mathbb{R},\ C_2 = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} \ ; \\ C_1 \perp C_2 \iff 0 = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi = \cos(\varphi-\theta) \iff \varphi - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Donc : ou bien $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et alors $M = R_\theta$; ou bien $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ et alors $M = S_\theta$. □

Corollaire 31
Les isométries du plan sont les rotations (autour de l'origine) et les réflexions (par rapport à une droite passant par l'origine).

Remarque 32 — *1. $\forall(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2,\ R_\theta \cdot R_\varphi = R_{\theta+\varphi} = R_\varphi \cdot R_\theta$. Le groupe $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est donc commutatif et l'application $\mathbb{R} \to \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}),\ \theta \mapsto R_\theta$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ vers le groupe $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}),\cdot)$. Ce morphisme est surjectif mais pas injectif (car son noyau est $2\pi\mathbb{Z}$).*

2. Au lieu de repérer un point du plan par ses coordonnées $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on peut le repérer par son affixe $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

(a) Après une rotation, la position du point M' sera repérée par les coordonnées :

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = R_\theta \cdot \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \iff z' = \mathrm{e}^{i\theta} \cdot z.$$

L'application $\mathbb{U} \to \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{e}^{i\theta} \mapsto R_\theta$ est un isomorphisme de groupes

(b) Après une réflexion, la position du point M' sera repérée par les coordonnées :

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = S_\theta \cdot \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = R_\theta \cdot \begin{pmatrix}x\\ -y\end{pmatrix} \iff z' = \mathrm{e}^{i\theta} \cdot \overline{z}.$$

Le théorème suivant montre que les isométries de l'espace sont les rotations et les composées d'une rotation et d'une réflexion (et pas seulement, comme en dimension deux, les rotations et les réflexions).

Théorème 33 (Les isométries de l'espace)
f est une isométrie de l'espace si, et seulement si, il existe un angle $\theta \in \mathbb{R}$ et une <u>*bond*</u> $\mathcal{B} = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ tels que :

$$\text{ou bien}\quad [f]_B = \begin{array}{c} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{u}) & f(\vec{v}) & f(\vec{w}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \text{ou bien}\quad [f]_B = \begin{array}{c} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{u}) & f(\vec{v}) & f(\vec{w}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Dans le premier cas, $\det(f) = +1$ et f est la rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé et orienté par $\vec{w}$.

Dans le second cas, $\det(f) = -1$ et f est la composée de la même rotation et de la réflexion par rapport au plan orthogonal à l'axe de rotation car

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}.$$

Preuve — Le polynôme caractéristique de f possède au moins une racine réelle car il est de degré 3. D'où f possède au moins une valeur propre réelle λ. Or $\lambda \in \{-1;+1\}$ car $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ pour tout vecteur $\vec{x}$. D'où : si $\vec{x}$ est un vecteur propre associé à une valeur propre λ, alors $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ et $\vec{x} \neq \vec{0}$. D'où $\|\vec{x}\| = \|f(\vec{x})\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$ et $\|\vec{x}\| \neq 0$. Donc $|\lambda| = 1$.

Il existe donc une *bond* $(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3})$ dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$A_1 = \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \text{ ou } A_2 = \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } A_3 = \begin{pmatrix} S_\theta & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \text{ ou } A_4 = \begin{pmatrix} S_\theta & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En effet, il existe un vecteur propre $\vec{\varepsilon_3}$ (que l'on peut normer) associé à une valeur propre ± 1. Le *sev* $\mathrm{Vect}(\vec{\varepsilon_3})$ est stable par f. D'où (proposition 18) : le plan $(\mathrm{Vect}(\vec{\varepsilon_3}))^\perp$ est aussi stable par f. Or f est une isométrie, d'où la restriction de f à ce plan est aussi une isométrie, donc : dans une *bon* $(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2})$ de ce plan, sa matrice 2×2 sera de la forme R_θ ou S_θ d'après le théorème 30.

Les matrices A_1 et A_2 sont bien de la forme voulue. Dans les matrices A_3 et A_4, le bloc S_θ se diagonalise sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans une *bon*. D'où, après avoir changé l'ordre des vecteurs de base, on peut réécrire les matrices A_3 et A_4 dans une *bond* :

$$A_3' = \begin{pmatrix} +I_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_4' = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\pi & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

qui sont bien de la forme voulue. □

Remarque 34 — *En dimension 2, le théorème 30 dit bien que toute matrice de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ est* <u>*égale*</u> *à une matrice de la forme $R_\theta \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ ou $S_\theta \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.*

Par contre, en dimension 3, le théorème 33 dit seulement que toute matrice de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ est <u>*semblable*</u> *à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ ou $\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.*

En dimension $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, il est également possible de réduire une isométrie :

Théorème 35
Soient E un espace euclidien et f une isométrie : E est la somme directe et orthogonale de $\mathrm{Ker}(\mathrm{id_E} - f)$, de $\mathrm{Ker}(-\mathrm{id}_E - f)$ et/ou de plans P_i stables par f sur lesquels f induit une rotation.

Preuve — Par une récurrence forte sur la dimension n de E :

- si $n = 1$, alors la matrice de f est $\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}-1\end{pmatrix}$;
- si $n = 2$, alors, d'après le théorème 30, ou bien f est une rotation, ou bien f est une réflexion et sa matrice est alors semblable à $\mathrm{diag}(1, -1)$;
- Si $n > 2$, alors supposons la propriété vraie aux rangs précédents. On sait (exercice 34 du chapitre IV) qu'il existe une droite ou un plan stable par f (ceci est vrai de tout endomorphisme) : notons F ce *sev* stable. On en déduit (proposition 18) que $F^\perp$ est aussi stable par f (ceci est vrai car f est une isométrie). Or ce *sev* $F^\perp$ est de dimension strictement inférieure à n, on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui conclut la preuve.

□

Corollaire 36 (Réduction d'une isométrie en base orthonormée)
Si f est une isométrie d'un espace euclidien E, alors il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, des réels $\theta_1, \ldots \theta_k$ et une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E tels que :

$$[f]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & R_{\theta_k} & & \\ & 0 & & I_p & \\ & & & & -I_q \end{pmatrix}$$

où on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$. Autrement dit : pour toute matrice $A \in \mathcal{O}(n)$, il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ telle que $P^{-1}AP = P^TAP$ est de la forme diagonale par blocs ci-dessus.

Preuve — On peut, grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt, rendre orthonormée la base des deux sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(\mathrm{id_E} - f)$ et $\mathrm{Ker}(-\mathrm{id}_E - f)$. Et le théorème 30 nous assure que la rotation induite sur chaque plan P_i est représentée dans une *bon* par une matrice R_{θ_i}. La concaténation de ces bases orthonormées est bien une *bon* (car la somme des *sev* est orthogonale d'après le théorème 35), ce qui justifie que la matrice de passage P appartient à $\mathcal{O}(n)$. □