Annexe B : Compacité

1. Un problème d'optimisation

Exemple 1.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $f : E \to E$ une application contractante :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

On suppose que pour tout $x \in E$, $\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\| \leq 1$.

Montrer que f admet un et un seul point fixe.

Commençons la résolution de cet exercice : supposons que f admette effectivement un point fixe $\ell \in E$. Comme $f(\ell) = \ell$, ℓ minimise $\|f(x) - x\|$. Il s'agit donc dans un premier temps de justifier l'existence d'un minimum global de $g : x \mapsto \|f(x) - x\|$, puis dans un second temps de prouver que les points en lesquels g admet un minimum sont des points fixes de f. Enfin, on prouvera l'unicité du point fixe.

La notion de compacité permet précisément de justifier l'existence d'un minimum (et aussi d'un maximum) global : elle généralise la notion de segment sur $\mathbb{R}$. Dans le cours de première année, le théorème énonçant que toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes se démontre par le théorème de Bolzano-Weierstrass. Il s'agit donc de généraliser ce résultat dans le contexte des espaces vectoriels normés.

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

2. Compacité

Définition 2.

Soit K une partie de E. On dit que K est *compacte* si de toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite convergente dont la limite est dans K.

Exemple 3.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, les segments de $\mathbb{R}$ sont des parties compactes.

Définition 4.

Soit (u_n) une suite de vecteurs de E, et $a \in E$. On dit que a est une *valeur d'adhérence* de (u_n) si on peut extraire de (u_n) une suite de limite a.

Proposition 5.

Soit K une partie compacte de E, et $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$. La suite u converge si et seulement si u n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

Preuve. Une suite convergente n'a qu'une seule valeur d'adhérence : sa limite. Réciproquement, on suppose que u n'a qu'une valeur d'adhérence ℓ. Supposons que u ne converge pas vers ℓ :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, \|u_n - \ell\| > \varepsilon.$$

On peut donc extraire de u une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ telle que pour tout n, $u_{\varphi(n)} \in E \setminus B(\ell, \varepsilon)$. Comme K est compact, on peut extraire de cette suite une suite $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)$ convergente. Puisqu'il s'agit d'une suite extraite de u, sa limite est une valeur d'adhérence de u, donc ℓ, ce qui est absurde car pour tout n, $\|u_{\varphi(\psi(n))} - \ell\| > \varepsilon$.

$\square$

Proposition 6.

Soit K une partie compacte de E. Alors K est fermée.

Preuve. Soit (u_n) une suite d'éléments de K convergente. Notons $\ell \in E$ sa limite. Par compacité de K, il est possible d'extraire de u une sous-suite convergente dont la limite appartient à K. Or, la limite d'une telle sous-suite ne peut être que ℓ, et donc $\ell \in K$.

D'après la caractérisation séquentielle des fermés, K est fermé. □

Proposition 7.

Soit K une partie compacte de E. Alors K est bornée.

Preuve. Supposons K non bornée et non vide. On construit une suite (u_n) d'éléments de K en choisissant pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n de sorte que $\|u_n\| > n$: c'est possible car sinon K serait bornée. Soit $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ une sous-suite de u. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_{\varphi(n)}\| > \varphi(n) \geq n$ donc cette sous-suite diverge (on rappelle que la norme est continue...). Ainsi K n'est pas compacte. □

Proposition 8.

Soit K un compact de E. Toute partie fermée de K est compacte.

Preuve. Soit C un fermé inclus dans K. Soit u une suite d'éléments de C. Il s'agit aussi d'une suite d'éléments de K. On considère alors une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ convergente de limite $\ell \in K$. Or C est fermé, donc $\ell \in C$. □

Proposition 9.

Une intersection de compacts est compacte.

Preuve. Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille de compacts de E et $K = \bigcap_{i \in I} K_i$. Alors K est fermée en tant qu'intersection de parties fermées, et contenue dans un compact, donc compacte. □

Proposition 10.

Une union finie de compacts est compacte.

Preuve. Il suffit de prouver le résultat pour deux compacts, le résultat suit par récurrence. Soient donc K_1 et K_2 deux compacts de E, et $K = K_1 \cup K_2$. Soit $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$. Deux cas se présentent :
- à partir d'un certain rang N, tous les u_n appartiennent à K_2 ;
- quel que soit N, il existe $n > N$ tel que $u_n \in K_1$.

Dans le premier cas, on peut extraire de u une suite convergente par compacité de K_2. Dans le second cas, on peut construire une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ de u telle que pour tout n, $u_{\varphi(n)} \in K_1$, puis en extraire une suite convergente par compacité de K_1. □

Proposition 11.

Le produit cartésien de deux compacts est compact.

Preuve. Soit K_1 un compact de E_1 et K_2 un compact de E_2. Soit $((u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $K_1 \times K_2$. On peut extraire de u une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ convergeant vers un vecteur ℓ_1 de K_1 par compacité de K_1, et on peut extraire de $\left(v_{\varphi(n)}\right)$ une suite $\left(v_{\varphi(\psi(n))}\right)$ convergeant vers un vecteur ℓ_2 de K_2 par compacité de K_2. Ainsi $\left(\left(u_{\varphi(\psi(n))}, v_{\varphi(\psi(n))}\right)\right)_n$ est une suite extraite de $((u_n, v_n))$ convergeant vers $(\ell_1, \ell_2) \in K_1 \times K_2$. □

3. Optimisation

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction *continue* de l'espace vectoriel normé E à valeurs dans un espace vectoriel F.

Théorème 12.

Soit K un compact de E. L'image de K par f est un compact de F.

Preuve. Soit y une suite de $f(K)$. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $y_n = f(u_n)$ avec $u_n \in K$. Par compacité de K, on peut extraire de u une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ convergeant vers un vecteur $\ell \in K$. Comme f est continue, la suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $f(\ell) \in f(K)$. □

Corollaire 13.

Soit $f : K \to \mathbb{R}$ continue où K est un compact de E. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Preuve. On sait que $f(K)$ est compact, donc fermé et borné. Ainsi f est bornée. Par caractérisation séquentielle des bornes supérieure et inférieure, $f(K)$ étant fermé, ces bornes appartiennent à $f(K)$, donc f atteint ses bornes. □

Remarque 14.

Pour prouver l'existence d'un extremum global d'une fonction f de $D \subset E$ à valeurs réelles, il suffit de prouver que f est continue et que D est compacte.

4. Compacité et dimension finie.

Remarque 15.

On a démontré dans le paragraphe précédent que tout compact est fermé borné. On ne peut affirmer en général que toute partie fermée bornée est compacte : on pourra pour s'en convaincre consulter l'exercice 13 de la banque d'exercices de CCINP. C'est cependant vrai en dimension finie.

Lemme 16.

On munit $E = \mathbb{R}^n$ de la norme uniforme. Toute partie fermée bornée de E est compacte.

Preuve. Soit K une partie fermée bornée de E. Soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $K \subset [-M, M]^n$. On sait que $[-M, M]$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc $[-M, M]^n$ est un compact de $\mathbb{R}^n$, et K étant fermée dans le compact $[-M, M]^n$, elle est elle-même compacte. □

Corollaire 17.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Preuve. Soit N une norme sur E. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\|.\|_\infty$ la norme uniforme associée.
L'application N est lipschitzienne relativement à $\|.\|_\infty$: pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i, y = \sum_{i=1}^{n} y_i \in E$,

$$N(y - x) = N\left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) e_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| \ N(e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \|y - x\|_\infty \ N(e_i) = k \ \|y - x\|_\infty$$

où $k = \sum_{i=1}^{n} N(e_i)$ ne dépend pas des vecteurs x et y.

On en déduit que N est une application continue de E (muni de la norme $\|.\|_\infty$) dans $\mathbb{R}$.

De plus, l'application $\varphi : \mathbb{R}^n \to E, (x_1, ..., x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ est un homéomorphisme quand on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme infinie et E de la norme $\|.\|_\infty$. On en déduit que la sphère unité S de E (pour $\|.\|_\infty$) est l'image par φ d'une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$, donc d'une partie compacte, donc est compacte dans E. Ainsi la restriction de N à S est bornée : soit m et M deux réels tels que

$$\forall x \in S, m \leq N(x) \leq M.$$

On en déduit que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $m \leq N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \leq M$ et donc $m\ \|x\|_\infty \leq N(x) \leq M\ \|x\|_\infty$. Ces inégalités sont encore valables pour x nul, et donc N et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes.

□

Corollaire 18.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Les parties fermées bornées de E sont compactes.

Corollaire 19. Bolzano-Weierstrass

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. De toute suite bornée de E on peut extraire une suite convergente.

Preuve. Soit u une suite bornée de E. Alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n appartient à la boule fermée B de centre 0 et de rayon M. Une telle boule étant bornée et fermée, elle est compacte. □

Corollaire 20.

Soit E un espace vectoriel. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E est fermé.

Preuve. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et u une suite de vecteurs de F convergente. On note ℓ la limite de cette suite. Puisque u converge, elle est bornée. Comme F est de dimension finie, on peut en extraire une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ convergent vers un vecteur de F. Or cette limite est ℓ. Donc $\ell \in F$. □

Théorème 21. Heine

Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Preuve. Soit f une fonction continue sur un compact K. On suppose que f n'est pas uniformément sur K :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x,y) \in K^2, \|x-y\| < \eta \text{ et } \|f(x) - f(y)\| > \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in K^2$ tel que $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$ et $\|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon$.

Puisque K est compact, on extrait de (x_n) une suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ convergeant vers un vecteur $x \in K$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\| < \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n}$ donc la suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ converge vers x. Par continuité de f et de $\|.\|$, on obtient $\|f(x) - f(x)\| \geq \varepsilon > 0$, une contradiction. Ainsi f est uniformément continue.

□

5. Solution du problème de l'introduction

Soit $g : x \in E \mapsto \|f(x) - x\|$. Comme f et $\|.\|$ sont continues, g est continue. Or la boule unité fermée B de E est compacte puisque E de dimension finie. On en déduit que g admet un minimum global sur B :

$$\exists \ell \in B, \forall x \in B, g(\ell) \leq g(x).$$

D'après l'énoncé, B est stable par f, donc $f(\ell) \in B$, donc $g(\ell) \leq g(f(\ell)) = \|f(f(\ell)) - f(\ell)\|$. Si $f(\ell) \neq \ell$, alors $\|f(f(\ell)) - f(\ell)\| < \|f(\ell) - \ell\| = g(\ell)$, une contradiction. Ainsi $f(\ell) = \ell$: la fonction f admet au moins un point fixe.

Soit ℓ' un point fixe quelconque de f. Si $\ell \neq \ell'$, alors $\|f(\ell) - f(\ell')\| < \|\ell - \ell'\|$, ce qui contredit la propriété de points fixes de ℓ et ℓ'. Donc ℓ est le seul point fixe de f.