Problème d'analyse

Partie A

(1) On remarque que les variations de la fonction associée à la courbe $\mathcal{C}_1$ correspondent aux signes de la fonction associée à la courbe $\mathcal{C}_2$. Ainsi la fonction g a pour courbe $\mathcal{C}_1$ et la fonction g' a pour courbe $\mathcal{C}_2$.

(2) La fonction g étant dérivable d'après l'énoncé, la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est

$$y = g'(0)(x-0) + g(0).$$

Or $g(0) = 1$ puisque la courbe $\mathcal{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0,1)$, et $g'(0) = 2$ puisque la courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0,2)$.

On en déduit que la tangente a pour équation $y = 2x + 1$.

Partie B

(3) Les fonctions $x \mapsto x^2 + 3x$ et exp étant dérivables sur $\mathbb{R}$, c'est le cas aussi pour la fonction f_0, et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} {f_0}'(x) + f_0(x) &= e^{-x}(2x + 3 - x^2 - 3x) + e^{-x}(x^2 + 3x) \\ &= e^{-x}(2x+3) \end{aligned}$$

et donc f_0 est bien une solution de l'équation différentielle (E) .

(4) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants. Ses solutions sont données par le cours : une fonction y est solution si et seulement s'il existe un réel λ tel que pour tout réel x, $y(x) = \lambda e^{-x}$.

(5) Nous connaissons les solutions de l'équation homogène associée, ainsi qu'une solution particulière. De là nous déduisons que l'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{x \mapsto \lambda e^{-x} + (x^2 + 3x)e^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(6) Soit λ un réel tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x}(x^2 + 3x + \lambda).$$

Nous savons d'après l'énoncé et la partie A que $g(0) = 1$. Il s'ensuit que $1 = \lambda$. Par suite,

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x}(x^2 + 3x + 1).$$

(7) Soit λ un réel et $y : x \mapsto e^{-x}(x^2 + 3x + \lambda)$. La courbe de y présente un point d'inflexion en un réel a si et seulement si y'' s'annule en changeant de signes en a. Cette fonction y est dérivable deux fois et

$$\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) = e^{-x}(x^2 - x - 4 + \lambda)$$

Cette dérivée s'annule deux fois en changeant de signes si et seulement si le discriminant Δ de $x^2 - x - 4 + \lambda$ est strictement positif.

Or $\Delta = 1 - 4(\lambda - 4)$.

Donc la courbe de y présente deux points d'inflexion si et seulement si $\lambda < \frac{17}{4}$.

Partie C

(8) On sait que $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty}(x^2+3x+2) = +\infty$, et donc par croissances comparées, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(9) (9.a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = e^{-x}(-x^2-3x-2+2x+3) = e^{-x}(-x^2-x+1).$$

(9.b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(x^2+x-1) \\ &= -e^{-x}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right) \\ &= -e^{-x}\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= -e^{-x}\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned}$$

On en déduit le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$-e^{-x}$		$-$	|	$-$	|	$-$	
$\frac{x+(1+\sqrt{5})}{2}$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{x+(1-\sqrt{5})}{2}$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘		↗		↘	0

Comme $f(0) = 2 > 0$, la fonction f étant croissante sur $\left[0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$, elle reste positive sur cet intervalle. Comme f est décroissante de limite nulle sur $[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$, elle est aussi positive sur cet intervalle. On en déduit que f est positive sur $\mathbb{R}^+$.

(10) Comme la fonction f est positive sur $\mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha) &= \int_0^\alpha f(t)dt = F(\alpha) - F(0) \text{ d'après le théorème fondamental de l'analyse} \\ &= (-\alpha^2 - 5\alpha - 7)e^{-\alpha} + 7. \end{aligned}$$

Exercice de logique

(1)

- Table de vérité

R	S	$S \Longrightarrow R$	$R \Longrightarrow (S \Longrightarrow R)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

- Déduction naturelle On suppose R vraie. Montrons que $S \Longrightarrow R$.

On suppose S vraie et montrons que R est vraie.

Or, on a supposé R vraie, donc on peut conclure que R est vraie.

(2) • <u>Table de vérité</u>

R	S	T	$R \Longrightarrow S$	$S \Longrightarrow T$	$R \Longrightarrow T$	$(S \Longrightarrow T) \Longrightarrow (R \Longrightarrow T)$	$(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow ((S \Longrightarrow T) \Longrightarrow (R \Longrightarrow T))$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

• <u>Déduction naturelle</u> On suppose $R \Longrightarrow S$ vraie, montrons que $(S \Longrightarrow T) \Longrightarrow (R \Longrightarrow T)$ est vraie.

On suppose $S \Longrightarrow T$, montrons $R \Longrightarrow T$.

On suppose R vraie, et montrons que T est vraie.

Comme R est vraie et comme $R \Longrightarrow S$, on peut affirmer que S est vraie. Or $S \Longrightarrow T$ est vraie. Il s'ensuit que T est vraie.

(3) • <u>Table de vérité</u>

R	S	R ou S	$R \Longrightarrow S$	$(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow S$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

On constate que les propositions R ou S et $(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow S$ ont les mêmes tables de vérité, elles sont donc équivalentes.

• <u>Déduction naturelle</u>

Procédons par double implication.

- On suppose R ou S vraie. Montrons que $(R \Rightarrow S) \Rightarrow S$ est vraie.

  On suppose $R \Rightarrow S$ vraie, et montrons S.

  On distingue deux cas :
  - si R est vraie, alors comme $R \Longrightarrow S$ est vraie, on peut conclure que S est vraie;
  - si S est vraie, alors on conclut directement que S est vraie.

- On suppose à présent que $(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow S$ est vraie, et montrons que R ou S est vraie. À cette fin, on peut supposer que S est fausse. On en déduit par contraposée que $R \Longrightarrow S$ n'est pas vraie, et donc que R est vraie et S fausse. En particulier R est vraie, ce qu'il fallait prouver.

(4) • <u>Table de vérité</u>

R	S	T	S ou T	$R \Longrightarrow (S$ ou $T)$	non R	S ou (non R)	S ou (non R) ou T

V	V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

Les tables de vérité des propositions $R \Longrightarrow (S \text{ ou } T)$ et S ou $(\text{non } R)$ ou T sont identiques, ces deux propositions sont donc équivalentes.

- Déduction naturelle

  Procédons par double inclusion.

  - Supposons $R \Longrightarrow (S \text{ ou } T)$ et montrons que S ou $(\text{non } R)$ ou T est vraie. Pour cela, nous pouvons supposer R vraie. Dans ce cas, S ou T est vraie, ce qu'il fallait prouver.
  - Supposons S ou $(\text{non } R)$ ou T vraie, et montrons que $R \Longrightarrow (S \text{ ou } T)$.

    Supposons R vraie, et montrons que S ou T est vraie.

    Comme R est vraie, nécessairement $(\text{non } R)$ est fausse, et donc S ou T est vraie.

(5) • Table de vérité

R	S	T	$R \Longrightarrow S$	R et T	S et T	$(R \text{ et } T) \Longrightarrow (S \text{ et } T)$	$(R \Longrightarrow S) \Rightarrow ((R \text{ et } T) \Longrightarrow (S \text{ et } T))$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V

- Déduction naturelle

  Supposons que $R \Longrightarrow S$ est vraie, et montrons que $(R \text{ et } T) \Longrightarrow (S \text{ et } T)$.

  Supposons R et T et montrons S et T.

  Comme R est vraie et comme $R \Longrightarrow S$, on conclut que S est vraie. On a déjà supposé T vraie. Donc S et T est vraie.

(6) • Table de vérité

R	S	T	$R \Leftrightarrow S$	$T \Rightarrow R$	$T \Rightarrow S$	$(T \Rightarrow R) \Rightarrow (T \Rightarrow S)$	$(R \Rightarrow S) \Rightarrow ((T \Rightarrow R) \Rightarrow (T \Rightarrow S))$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V

V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

- Déduction naturelle

  Supposons que $R \Leftrightarrow S$ est vraie, montrons que $(T \Rightarrow R) \Leftrightarrow (T \Rightarrow S)$. Procédons par double implication.

  - Supposons $T \Rightarrow R$ et montrons que $T \Rightarrow S$.

    Supposons T et montrons que S est vraie.

    Comme T est vraie et comme $T \Rightarrow R$, on peut affirmer que R est vraie. Comme $R \Rightarrow S$ est aussi vraie, on peut conclure que S est vraie.

  - Supposons $T \Rightarrow S$ et montrons que $T \Rightarrow R$.

    Supposons T vraie et montrons que R est vraie.

    Comme T est vraie et comme $T \Rightarrow S$, on peut affirmer que S est vraie. Comme $S \Rightarrow R$ est aussi vraie, on peut conclure que R est vraie.