- *Il sera tenu compte de la rédaction du devoir tant au niveau des explications que de la présentation. Toute affirmation non justifiée ne rapportera aucun point.*
- *Si le candidat repère ce qu'il croit être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- *Les calculatrices sont interdites.*
- *Le candidat est invité à encadrer ses résultats dans la mesure du possible.*
- *Toute utilisation de correcteur est interdite : le candidat peut raturer proprement à la règle si besoin.*
- *Le candidat composera sur des feuilles* ***simples*** *uniquement numérotées et les attachera ensemble dans l'ordre avec un trombone.*

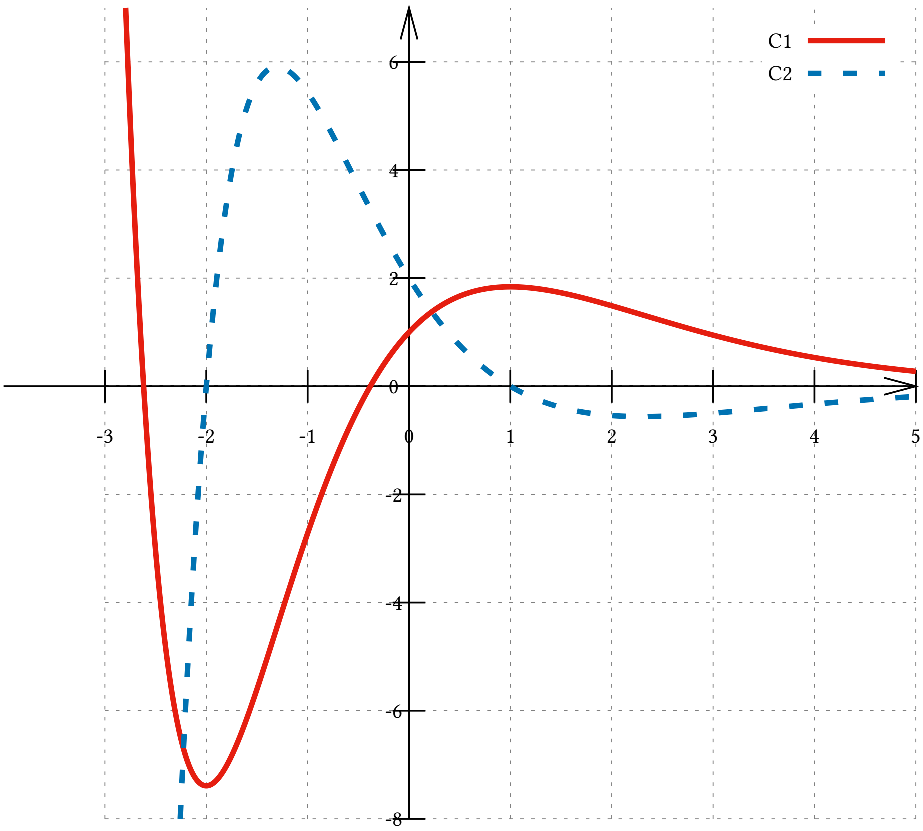
Problème d'analyse

Partie A

On donne ci-dessous dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g'.

On précise également que :

- la courbe $\mathcal{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0, 1)$;
- la courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0, 2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2, 0)$ et $(1, 0)$.



(1) En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.

(2) Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

Partie B

On considère (E) l'équation différentielle

$$y + y' = (2x+3)e^{-x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x .

(3) Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E) .

(4) Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.

(5) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) .

(6) On admet que la fonction g décrite dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E) . Déterminer alors l'expression de la fonction g .

(7) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}.$$

(8) Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.

On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.

(9) On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

(9.a) Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$.
(9.b) Déterminer le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(10) Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

(11) On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

Soit α un nombre réel positif.

Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

Exercice de logique

Soient R, S et T des propositions. Montrer à l'aide de tables de vérité, puis par un raisonnement déductif (déduction naturelle) que les propositions suivantes sont vraies.

(1) $R \Longrightarrow (S \Longrightarrow R)$
(2) $(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow ((S \Longrightarrow T) \Longrightarrow (R \Longrightarrow T))$
(3) $(R \text{ ou } S) \Longleftrightarrow ((R \Longrightarrow S) \Longrightarrow S)$
(4) $(R \Longrightarrow (S \text{ ou } T)) \Longleftrightarrow (S \text{ ou } (\text{non } R) \text{ ou } T)$
(5) $(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow ((R \text{ et } T) \Longrightarrow (S \text{ et } T))$
(6) $(R \Longleftrightarrow S) \Longrightarrow ((T \Longrightarrow R) \Longleftrightarrow (T \Longrightarrow S))$