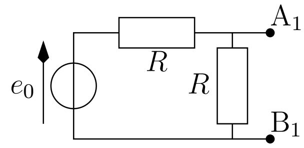
DM n° 4 de Physique - Circuits linéaires

Résistances en chaîne

On souhaite étudier le comportement d'une série de générateurs dont la complexité est croissante. On se propose pour cette étude de partir d'un générateur relativement simple, et d'ajouter une par une des cellules, en chaîne. Cela permet alors de formuler une généralisation à un grand nombre de cellules. L'expression ainsi obtenue sera approximée et l'erreur commise calculée.

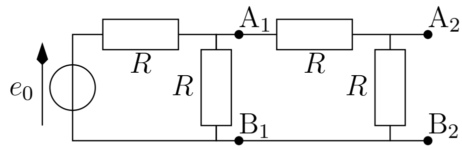
A Étude du circuit à une ou deux mailles

On commence par étudier la première cellule. Le générateur 1 (dipôle A_1B_1) est constitué d'une source idéale de tension à vide e_0 et de deux résistances R.



1. Trouver le modèle de Thévenin du dipôle A_1B_1. On notera respectivement e_1 et R_1 la fém et la résistance de ce générateur, et on exprimera leur valeur en fonction de e_0 et R.

On étudie maintenant le générateur 2 réprésenté ci-contre.

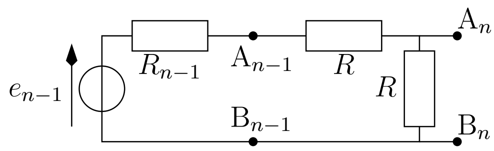


2. Trouver le modèle de Thévenin du dipôle A_2B_2. On notera respectivement e_2 et R_2 la fém et la résistance de ce générateur, et on exprimera leur valeur en fonction de e_0 et R.

B Généralisation

On ajoute une troisième cellule.

3. Trouver le modèle de Thévenin du dipôle A_3B_3. On notera respectivement e_3 et R_3 la fém et la résistance de ce générateur, et on exprimera leur valeur en fonction de e_0 et R.



On note A_nB_n le dipôle constitué de n cellules, e_n et R_n la fém et la résistance du modèle de Thévenin du générateur équivalent. On peut donc représenter ce dipôle à partir du dipôle $n-1$.

4. Montrer que l'on peut écrire

$$e_n = \frac{R\,e_{n-1}}{R_{n-1} + 2\,R} \quad \text{et} \quad R_n = \frac{R\,(R + R_{n-1})}{R_{n-1} + 2\,R}$$

C Simplification par approximation

5. R_n tend vers une limite notée R_∞ : exprimer cette valeur en fonction de R uniquement.
6. On peut assimiler R_n à R_∞ à partir de $n = 2$, avec une erreur faible. Exprimer alors e_n en fonction de e_{n-1}, puis en fonction de e_0 et de n uniquement.
7. Calculer l'erreur commise par cette approximation pour $n = 3$ et commenter ce résultat.