

TD n° 16 de Physique

Mécanique - Théorème du moment cinétique

Applications directes du cours

1 Pendule simple

On considère un pendule simple (point matériel M de masse m), de longueur ℓ , laissé sans vitesse initiale depuis un angle faible α par rapport à la verticale. On suppose que son mouvement est plan et on utilise des coordonnées polaires dans le plan du mouvement.

Déterminer le moment des forces appliquées à M par rapport au point O d'attache du fil.

En déduire l'équation différentielle du mouvement de M.

2 Mouvement plan du pendule simple

On considère un pendule simple (point matériel M de masse m), laissé sans vitesse initiale depuis un angle α par rapport à la verticale. Déterminer la valeur initiale du moment cinétique de M en O. Déduire du moment des forces appliquée à M par rapport à O que le mouvement est plan, dont on déterminera la normale.

Exercices

1 Toboggan

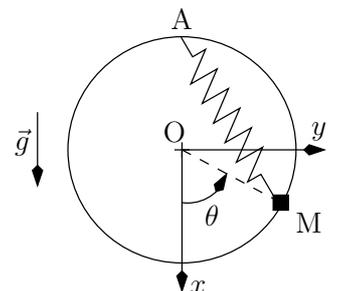
Un enfant, assimilé à un point matériel E de masse $m = 20$ kg, glisse sur un toboggan en forme d'arc de cercle, de rayon $R = 2,5$ m. Il s'élance à un angle $\theta_0 = 15^\circ$ par rapport à l'horizontale, et sort du toboggan pour $\theta_1 = 90^\circ$ (θ augmente au cours du temps). Les frottements sont négligés.

- Établir l'équation différentielle du mouvement de l'enfant. On utilisera le TMC par rapport à l'axe de rotation de E.
- En déduire la vitesse v en fonction de θ (indice : multiplier par $\dot{\theta}$ l'équation précédente...).
- Calculer la vitesse maximale atteinte. Commenter.

2 Rappel élastique le long d'un cercle

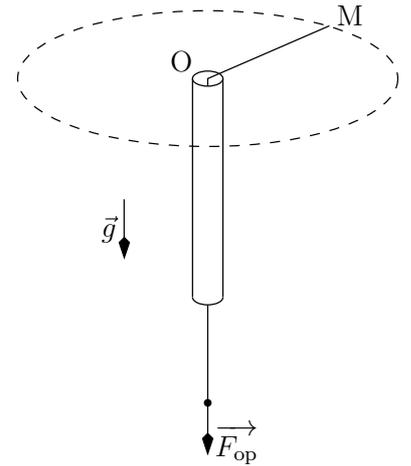
Une masselotte, assimilée à un point matériel M de masse m , est assujettie à glisser sans frottements sur un cercle vertical de center O et de rayon R . Elle est reliée au sommet du cercle noté A par un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos ℓ_0 .

- Établir l'équation différentielle du mouvement de M, selon trois méthodes :
 - le théorème du moment cinétique
 - le principe fondamental de la dynamique
 - le théorème de l'énergie mécanique
- Déterminer les positions d'équilibres. Quelles conditions faut-il sur les constantes du problème pour que trois positions d'équilibres existent ?
- Étudier alors leur stabilité.



3 Fronde de longueur variable

Une fronde est constituée d'une masselotte A de $m = 100 \text{ g}$ attachée à un fil de longueur ℓ . Sa trajectoire est initialement un cercle horizontal, de centre O et de rayon $\ell_0 = 1 \text{ m}$, parcouru avec une vitesse uniforme v_0 . Le fil passe dans un tube vertical de très faible diamètre, centré en O, qui permet de faire varier ℓ en tirant sur son extrémité inférieure (force \vec{F}_{op} exercée par un opérateur).



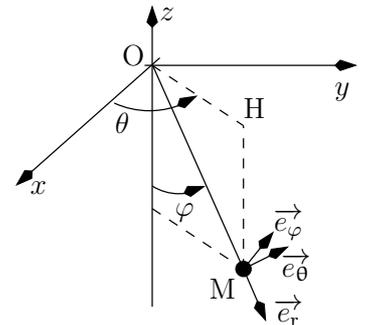
1. Sachant que la fronde fait 2 tours par seconde, comparer la force de tension du fil et le poids de la masse m . Commenter.
2. Déterminer les valeurs de la vitesse de A, de son moment cinétique en O et de son énergie cinétique.

On tire sur le fil à l'extrémité, avec une force \vec{F}_{op} .

3. Que peut-on dire sur l'évolution du moment cinétique et de l'énergie cinétique ?
4. Calculer la vitesse de A et son énergie cinétique lorsque la longueur du fil de la fronde est réduite de moitié.
5. En déduire le travail de \vec{F}_{op} .
6. Retrouver ce résultat par le calcul direct.

4 Pendule en rotation uniforme

L'extrémité O d'un fil OM de masse négligeable et de longueur ℓ est fixe. Un objet quasi-punctuel de masse m est suspendu en M. L'objet est écarté d'un angle α par rapport à la verticale, puis lancé horizontalement. On décrit le mouvement du point M à l'aide de coordonnées sphériques, indiquées ci-contre ($\vec{OM} = r \vec{e}_r$, \vec{e}_θ est horizontal et orthogonal à \vec{OM} , $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$). On souhaite qu'il décrive des cercles horizontaux.



1. Exprimer le moment cinétique de M par rapport à O, dans le cas où le mouvement est circulaire.
2. Exprimer le moment des forces appliquées à l'objet par rapport à O.
3. En déduire la vitesse angulaire de rotation du point M dans le plan du mouvement.
4. Exprimer la période de révolution en fonction de g , ℓ et α .

5 TMC appliqué sur un point mobile

On considère un pendule simple, de masse m et de longueur ℓ . L'extrémité A subit de petites oscillations le long de l'axe horizontal, telles que $x_A = x_0 \sin(\omega t)$.

1. Il est dans ce cas préférable d'appliquer le théorème du moment cinétique au point mobile A plutôt qu'au point fixe O. Pourquoi ?
2. Reprendre la démonstration du théorème du moment cinétique. Quel terme additionnel intervient alors ?
3. Déterminer la dérivée $\frac{d\vec{L}_A}{dt}$ à l'aide du théorème du moment cinétique.
4. Établir l'équation du mouvement du pendule simple effectuant de petites oscillations.
5. Quel est l'évolution de $\theta(t)$ lorsqu'un régime sinusoïdal permanent s'est établi ?
6. Pour quelle valeur ω_r de la pulsation ω y aura-t-il résonance ?
7. Que peut-on dire du déphasage lorsque $\omega > \omega_r$? $\omega < \omega_r$?

