TD n° 17 de Physique
Mécanique - Forces centrales conservatives

Applications directes du cours

1 Trajectoire d'une comète

On considère une comète, qui ne subit en première approximation que l'attraction gravitationnelle du Soleil. La période de révolution de la comète autour du Soleil dure 11,5 années. La comète s'approche au plus près du Soleil de 0,2 ua. On rappelle que l'ua (unité astronomique) est la distance Terre-Soleil.
Déterminer le grand axe de la trajectoire de la comète en ua et son aphélie.

2 Obite elliptique et saisons

L'orbite de la Terre autour du Soleil étant elliptique, la Terre se trouve à différents moments de l'année plus ou moins proche du Soleil. La phrase suivante est souvent entendue/lue : « L'hiver survient quand la Terre est la plus éloignée du Soleil ». Montrer par un argument simple que cette assertion est clairement fausse. À quoi sont dues les saisons ?

3 Taille d'un trou noir de masse terrestre

Calculer, à la manière dont l'ont fait Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) et John Mitchell (1724-1793), le rayon que devrait posséder un astre de masse m tel que même la lumière n'arrive pas à s'échapper depuis sa surface. Réaliser une application numérique pour la Terre de masse $M_\mathrm{T} = 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. On rappelle que $\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$ et que $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.
Expliquer la dénomination « trou noir » popularisée par le physicien John Archibald Wheeler (1911-2008) pour de tels astres.

Exercices

1 Vitesse d'un satellite à son périgée

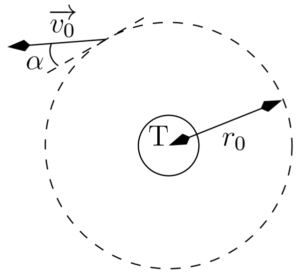
Lors de son lancement, le satellite d'observation Hypparcos est resté sur son orbite de transfert à cause d'un problème technique. On l'assimile à un point matériel M de masse $m = 1{,}1\,\mathrm{t}$. L'orbite de transfert est elliptique et la distance Terre-satellite varie entre $d_\mathrm{P} = 200\,\mathrm{km}$ au périgée et $d_\mathrm{A} = 35{,}9 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$ à l'apogée. On mesure la vitesse du satellite à l'apogée : $v_\mathrm{A} = 3{,}5 \cdot 10^2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

1. Faire un schéma de la trajectoire en faisant apparaître la position O du centre de la Terre, l'apogée A et le périgée P.
2. Déterminer le demi-grand axe a de la trajectoire.
3. En déduire l'énergie mécanique et la période du satellite.
4. À l'aide du moment cinétique, déterminer la vitesse v_P du satellite au périgée.

2 Erreur de satellisation

On veut qu'un satellite S de masse m décrive une orbite circulaire de rayon r_0 et de vitesse v_0 autour du centre T de la Terre, de masse M_{T}. On pose G la constante de gravitation universelle.

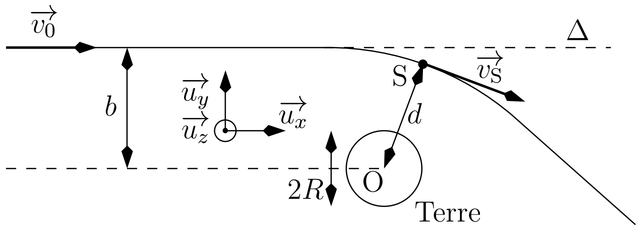
1. Montrer que le mouvement est uniforme.
2. Exprimer v_0 et l'énergie mécanique E_{m} du satellite en fonction de G, M_{T}, m et r_0.



Une erreur a été commise lors de la satellisation. Le satellite a bien été lancé suivant un rayon r_0 et avec une vitesse v_0, mais la direction réelle de lancement fait un angle α avec la tangente de l'orbite circulaire, vers l'extérieur.

3. Calculer l'énergie mécanique du satellite.
4. Calculer le moment cinétique du satellite en fonction de m, r_0, v_0 et α, puis de G, M_{T}, m, r_0 et α.
5. En déduire l'expression de l'énergie potentielle effective en fonction de r, G, M_{T}, m, r_0 et α.
6. Déterminer l'apogée et le périgée du satellite.
7. Montrer que l'énergie mécanique, à l'apogée et au périgée, a la valeur déterminée à la question 3. On déterminera la vitesse, respectivement v_{A} et v_{P} aux deux points, en fonction de G, M_{T}, r_0 et α.
8. Après avoir comparé le moment cinétique du satellite sans et avec l'erreur de satellisation puis tracé l'allure de l'énergie potentielle effective dans les deux cas, vérifier que la nature de la trajectoire est bien celle trouvée précédemment.

3 Météorite hyperbolique



Une météorite a, très loin de la Terre, une vitesse $v_0\,\overrightarrow{u_{\mathrm{x}}}$, portée par une droite Δ située à la distance b du centre de la Terre. On note m la masse de la météorite, M celle de la Terre, R le rayon de la Terre et G la constante de gravitation universelle.

1. Montrer que le moment cinétique est une constante du mouvement.
2. En déduire une relation entre b et la distance minimale Terre-Météorite notée d, faisant intervenir la vitesse v_{S} au sommet S de la trajectoire.
3. Quelle autre quantité est constante ?
4. Établir une deuxième relation entre v_0, v_{S} et d.
5. En déduire l'expression de d en fonction de b, v_0 et des constantes du problème.
6. Déterminer la valeur minimale $b_{\min}$ de b pour que la météorite ne rencontre pas la Terre.

On souhaite déterminer l'angle de déviation φ entre $\overrightarrow{v_0}$ et la vitesse finale $\overrightarrow{v_{\mathrm{f}}}$ dans le cas où $b > b_{\min}$. On utilise pour cela le vecteur dit de Runge-Lenz, défini par l'expression

$$\overrightarrow{R} = -G\,M\,m\,\overrightarrow{u_{\mathrm{r}}} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{L_{\mathrm{O}}}$$

7. Montrer que $v_0 = v_{\mathrm{f}}$.
8. Montrer que le vecteur de Runge-Lenz est constant.
9. Trouver une relation entre $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, b, v_0, G et M.
10. En déduire l'expression de $\tan\dfrac{\varphi}{2}$.

4 Mouvement d'une comète parabolique

Soit une comète dont le mouvement est coplanaire à celui de la Terre. On suppose que les trajectoires de la comète et de la Terre ne sont dues qu'à l'attraction solaire : l'intéraction Terre-comète est négligée. La trajectoire de la Terre est supposée circulaire, de rayon r_0 et de vitesse v_0. On note m_T la masse de la Terre, m_C la masse de la comète, M_S la masse du Soleil et G la constante de gravitation universelle.

1. Montrer que le mouvement est uniforme. Exprimer v_0 en fonction de M_S, G et r_0.

La trajectoire de la comète est coplanaire à celle de la Terre. Son périhélie est à une distance $r_0/2$ du centre du Soleil, et sa vitesse en ce point vaut $2\,v_0$.

2. Combien vaut l'énergie mécanique de la comète ?
3. Montrer qu'il s'agit donc d'un état de diffusion.
4. Exprimer la vitesse de la comète en fonction de sa distance r au centre du Soleil.

L'orbite de la comète est une parabole, dont l'équation polaire est

$$r = \frac{p}{1+\cos(\theta)}$$

où p est appelé *paramètre* de la courbe. Elle coupe celle de la Terre en deux points A et B.

6. Déterminer l'expression de p.
7. Montrer que AB est un diamètre de l'orbite terrestre.
8. À l'aide du moment cinétique, déterminer l'angle entre les deux orbites en A et en B.

5 Lancement d'un satellite

Le lancer d'un satellite depuis une navette spatiale s'effectue en trois étapes successives :

a) la navette est d'abord mise sur orbite circulaire, au moyen de fusées auxiliaires ;
b) à partir de cette orbite circulaire, la navette éjecte le satellite qui gagne des altitudes plus élevées ;
c) enfin, une fois à son altitude définitive, le satellite s'y stabilise au moyen d'un dispositif de freinage.

Dans la première phase, la navette et son satellite sont solidaires. Avec l'équipage et la charge utile, l'ensemble est assimilé à un point matériel de masse M en orbite circulaire d'altitude h. On note l'accélération de la pesanteur au niveau du sol $g_0 = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et le rayon de la Terre $R = 6400\,\mathrm{km}$. On pose $r = R + h$.

1. Déterminer, dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, la vitesse $v(r)$ en fonction de R, r et g_0.
2. En déduire l'expression de la vitesse angulaire $\omega_0(r)$ de la navette.
3. Exprimer l'énergie mécanique E_m de l'ensemble navette et satellite, en fonction de R, r, g_0 et M.

Avant le lancement, la fusée était placée sur un pas de tir situé à la latitude λ.

4. Déterminer la vitesse v_0 de la navette avant le lancement en fonction de λ, R et de la période T de rotation propre de la Terre.
5. En déduire la variation d'énergie mécanique entre le lancement et l'arrivée sur orbite circulaire, en fonction de R, r, g_0, M, T et λ.
6. Quel choix de λ est optimal ? À quelle zone géographique ce choix correspond-il ?
7. L'orbite à atteindre est située à l'altitude de 300 km. Déterminer l'énergie nécessaire par unité de masse pour le lancement des fusées françaises sur la base de Kourou ($\lambda_1 = 5°13'\mathrm{N}$).

Un satellite GPS effectue une rotation complète autour de la Terre en 12 heures.

8. Déterminer la hauteur H de l'orbite circulaire du satellite.