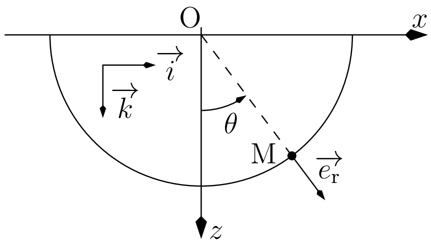
# DM n° 11 de Physique
# Dynamique du point et théorèmes énergétiques

## Oscillateur contraint à ressort

On considère un point matériel $M$ de masse $m$ se déplaçant sur un demi-cercle de rayon $R$ dans le champ de pesanteur uniforme $\overrightarrow{g} = g\,\overrightarrow{k}$. On repère la position de M par l'angle $\theta = (\overrightarrow{k}, \overrightarrow{\mathrm{OM}})$.




### A Mouvement sans frottement

On considère tout d'abord que les frottement entre le point matériel et le cercle sont négligeables.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta$.
2. Que devient-elle dans le cas de petites oscillations ?
3. Quelles sont les positions d'équilibres ? S'agit-il d'équilibres stables ou instables ?

### B Mouvement avec frottement

On se restreint désormais à de petites oscillations. On considère que le point matériel est soumis à une force supplémentaire de frottement fluide, d'expression $\overrightarrow{F(t)} = -\mu\,\overrightarrow{v(t)}$, où $\mu$ est le coefficient de frottement, constant et $\overrightarrow{v(t)}$ le vecteur vitesse de M.

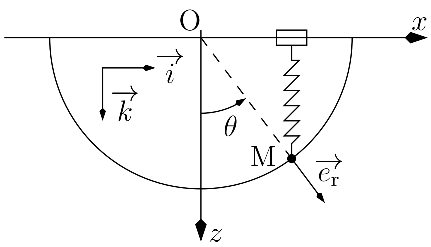
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta$.
5. Mettre cette équation sous forme canonique. Déterminer l'expression de la pulsation propre $\omega_0$ et du facteur de qualité $Q$ en fonction de $m$, $\mu$, $g$ et $R$. Donner leur dimension.
6. Qu'est-ce que le régime critique ? Donner l'expression $\mu_\mathrm{c}$ du coefficient $\mu$ dans ce cas.

Les conditions initiales sont $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$.

7. Donner l'expression ainsi que l'allure de $\theta(t)$ dans les trois cas possibles ($\mu < \mu_c$, $\mu = \mu_c$ et $\mu > \mu_c$). Précisez les noms de ces trois régimes.

### C Ressort supplémentaire

On néglige à nouveau les frottements. Le point matériel est maintenant également fixé à un ressort de longueur au repos $\ell_0 < R$ et de raideur $k$. L'autre extrémité du ressort peut glisser sans frottement sur une tige fixe horizontale confondue avec l'axe O$x$. Le ressort reste toujours vertical, se déplaçant uniquement perpendiculairement à la tige. On suppose que la relation $m\,g < k\,(R - \ell_0)$ est toujours vérifiée.



8. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le point matériel $M$. Les exprimer en fonction de $\theta$ lorsque cela est possible.
9. Exprimer l'énergie potentielle $E_p$ totale correspondante à ces interactions.
10. Quelles sont les positions d'équilibres ? S'agit-il d'équilibres stables ou instables ?

On note $\theta = \theta_\mathrm{e}$ à la position d'équilibre stable telle que $0 < \theta_\mathrm{e} < \pi/2$.

11. Que peut-on dire de la réaction du cerceau à l'équilibre en $\theta = \theta_\mathrm{e}$ ?

On donne le « développement limité à l'ordre 2 autour de $\theta = \theta_\mathrm{e}$ » de la fonction $E_\mathrm{p}(\theta)$ :

$$E_p(\theta) = E_p(\theta_\mathrm{e}) + (\theta - \theta_\mathrm{e})\ k_1 + \frac{(\theta - \theta_\mathrm{e})^2}{2}\, k_2$$

avec

$$k_1 = \left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\theta_\mathrm{e}} \qquad \text{(valeur de la dérivée première de } E_\mathrm{p} \text{ pour } \theta = \theta_\mathrm{e})$$

$$k_2 = \left.\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=\theta_\mathrm{e}} \qquad \text{(valeur de la dérivée seconde de } E_\mathrm{p} \text{ pour } \theta = \theta_\mathrm{e})$$

12. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta$ pour de petites oscillations autour de $\theta_\mathrm{e}$.
13. Quelle est l'expression générale de la solution de cette équation différentielle ? À quoi correspond le terme $\dfrac{k}{m}\,(\sin\theta_\mathrm{e})^2$ ?