TD n° 26 de Physique
Mécanique quantique

Applications directes du cours

1 Photons hertziens

Un émetteur radio émet un signal de fréquence 105,5 MHz et de puissance 100 kW. Évaluer le nombre de photons qu'il émet par seconde.

2 Couleur d'un laser

La lumière d'un faisceau laser est émise par des atomes effectuant une transition entre deux niveaux d'énergie distants de 2,28 eV. Quelle est la couleur de ce laser ?

3 Ordre de grandeur

Une personne marche dans la rue. Évaluer sa vitesse typique v, sa quantité de mouvement p et la longueur d'onde λ de de Broglie associée. Que penser de l'importance de la description quantique du mouvement de cette personne ?

4 Inégalité de Heisenberg

Un radar autoroutier flashe une voiture de masse $m = 1{,}3\,\mathrm{t}$ roulant à une vitesse de $150\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. L'éclair du flash dure 0,01 s. Quelle est l'indétermination sur la position de la voiture ? En déduire une minoration de l'indétermination quantique de la vitesse. Conclure.

5 Relativité restreinte

La relativité restreinte (Einstein, 1905) conduit à une relation générale entre l'énergie E d'une particule, sa quantité de mouvement p et sa masse m :

$$E^2 = p^2\,c^2 + m^2\,c^4$$

1. À quel résultat conduit cette relation dans le cas d'une particule de masse nulle comme le photon ? En déduire alors la relation entre la longueur d'onde λ de l'onde associée au photon et sa quantité de mouvement p.
2. Quelle est l'énergie (dite énergie de masse) d'une particule de masse m au repos ? Calculer l'énergie de repos d'un électron et d'un proton, en les exprimant en eV. Rappel : $m_\mathrm{e} = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $m_\mathrm{p} = 1{,}672 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $1\,\mathrm{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

Exercices

1 Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène

On part d'une description classique (dite planétaire) d'un atome d'hydrogène, dans laquelle un électron est en orbite circulaire de rayon r autour du proton. De tels états sont acceptables quantiquement si, après un tour, l'onde associée à l'électron est en phase avec son état initial.

1. Lier la longueur d'onde au rayon.
2. En déduire la condition dite de Bohr liant le rayon r de l'orbite, la quantité de mouvement p de l'électron, la constante de Planck réduite et un entier n.
3. Un calcul classique (qui sera fait en mécanique) montre que la quantité de mouvement d'un électron en orbite circulaire de rayon r varie proportionnellement à $1/\sqrt{r}$. En déduire comment varie le rayon quantifié r_n d'une orbite de Bohr en fonction de l'entier n.
4. L'énergie potentielle de gravitation, liée à l'interaction gravitationnelle, est inversement proportionnelle à la distance séparant les deux masses qui s'attirent. Par un raisonnement simple, dire comment les niveaux d'énergie E_n de l'électron dans l'atome dépendent de n. Le résultat est-il correct ?

2 Dimension de l'atome d'hydrogène

On considère un atome d'hydrogène sphérique de taille caractéristique a. On admet l'approximation suivante pour l'énergie de l'électron dans l'atome :

$$E \approx \frac{\hbar^2}{2\,m\,a^2} - \frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,a}$$

où $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ et $\dfrac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} = 9{,}00 \cdot 10^{9}\,\mathrm{USI}$. On rappelle que $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}$ et que la masse de l'électron est $m_\mathrm{e} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

1. Que représente le premier terme dans cette expression ? D'où provient-il ? Que représente le deuxième terme ?
2. Déterminer la valeur a_min de a qui minimise cette expression. Faire l'application numérique. Ce calcul donne l'ordre de grandeur de la taille de l'atome d'hydrogène.
3. Déterminer la valeur minimale de l'expression approchée de E. La calculer numériquement.
4. En mécanique classique, pour un électron en orbite circulaire de rayon a autour du noyau, on trouve une énergie mécanique $E = -\dfrac{e^2}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,a}$. De plus, l'électron en mouvement perd de l'énergie par rayonnement électromagnétique. Expliquer la phrase suivante : « C'est l'inégalité de Heisenberg qui est à la base de la stabilité des atomes. ».

3 Fonction d'onde d'une particule dans un puits infini

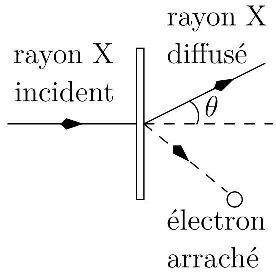
Une particule quantique est confinée dans la zone comprise entre les plans $x = 0$ et $x = \ell$ dans un puits infini. On admet que sa fonction d'onde est de la forme

$$\Psi(x,t) = A\,\sin(k\,x)\,\exp(-\mathrm{i}\,\omega\,t)$$

où A, k et ω sont des constantes réelles positives.

1. Déterminer les valeurs possibles de k en fonction de ℓ et d'un entier n positif quelconque.
2. La probabilité de trouver la particule dans l'intervalle $[x, x+\mathrm{d}x]$ est $|\Psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x$. Justifier la condition de normalisation de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\ell |\Psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x$. L'utiliser pour trouver l'expression de A en fonction ℓ.
3. Tracer $|\Psi(x,t)|^2$ en fonction de x dans les cas $n = 1$ et $n = 2$. Commenter. Comparer aussi au cas d'une particule classique.

4 Effet Compton



La nature corpusculaire des rayonnements électromagnétiques, et en particulier l'existence d'un quantum d'énergie et d'une quantité de mouvement bien définis, a été mise en évidence expérimentalement en 1922 par le physicien américain A.H. Compton. Dans son expérience de diffusion schématisée ci-contre, il bombarde une mince feuille de graphite avec des rayons X. Derrière cette cible, il place un détecteur de rayons X qu'il peut faire tourner d'un angle θ par rapport à la direction des rayons incidents.

Il constate alors que des électrons sont arrachés de la cible. De plus, il observe que les rayons X incidents sont diffusés dans toutes les directions avec une longueur d'onde λ', fonction de l'angle θ, différente de la longueur d'onde incidente λ. Il justifie plus tard ses observations dans le cadre d'un modèle théorique de collision relativiste entre un photon incident et un électron « libre » et obtient ainsi la relation, conforme aux données expérimentales :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e\, c}\,(1 - \cos\theta)$$

avec h la constante de Planck, m_e la masse de l'électron, c la vitesse de la lumière dans le vide.

Pour démontrer l'expression précédente, on note $\overrightarrow{p}$ la quantité de mouvement du photon avant le choc, $\overrightarrow{p'}$ la quantité de mouvement du photon après et $\overrightarrow{p_e}$ la quantité de mouvement de l'électron après le choc. L'électron est supposé initialement immobile dans le référentiel de la cible. De plus, ce dernier étant considéré relativiste dans l'expérience, son énergie totale est donnée par $E = \sqrt{p^2\, c^2 + m_e^2\, c^4}$.

1. Montrer que l'expression $\dfrac{h}{m_e\, c}$ est homogène à une longueur et la calculer.
2. Exprimer la conservation de la quantité de mouvement du système {photon+électron} entre avant et après le choc.
3. Exprimer de même la conservation de l'énergie totale du système {photon+électron} entre avant et après le choc.
4. Déduire des deux lois de conservation précédentes l'expression de la variation de longueur d'onde $\lambda' - \lambda$ du photon X telle qu'obtenue par Compton, en fonction de h, c, m_e et θ.
5. Calculer $\lambda' - \lambda$ pour un angle de $\theta = 30°$. On donne la masse de l'électron $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg. En déduire la variation d'énergie subie par le photon si sa longueur d'onde incidente était $\lambda = 23{,}21$ pm.
6. Une énergie d'ionisation est de l'ordre de la dizaine d'électron-volts. Commenter le résultat précédent. On rappelle que $1\,\text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J.