DM n° 18 de Physique - Statique des fluides

Équilibre d'une particule solide dans un fluide

A Équilibre dans un liquide

On considère un liquide au repos dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$. Ce liquide est supposé incompressible de masse volumique ρ. On note, dans cette partie, z la *profondeur* mesurée à partir de la surface libre du liquide, correspondant à $z = 0$. La pression à la surface du liquide est P_0.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la pression $P(z)$ qui décrit l'équilibre du fluide dans le champ de pesanteur.
2. En déduire le champ de pression $P(z)$ dans le liquide.
3. On considère une particule solide complètement immergée dans le liquide. Cette particule sphérique est supposée homogène, de masse volumique ρ_P et de rayon a. Le barycentre de la particule est à l'altitude z_P. Calculer la résultante $\overrightarrow{F_\mathrm{A}}$ des forces de pression agissant sur la particule.
   Remarque : le théorème d'Archimède est applicable ici et pourra permettre de vérifier au brouillon le résultat, mais il s'agit bien d'essayer l'intégration des forces de pression.
4. En ne considérant que les forces de pesanteur et de pression agissant sur la particule, préciser à quelle condition celle-ci reste au repos.
5. Discuter brièvement le mouvement de la particule lorsque cette condition n'est pas satisfaite.

B Équilibre dans l'atmosphère

On suppose maintenant que le fluide est l'atmosphère, assimilé à un gaz parfait de masse molaire M, de masse volumique $\rho(z)$ et de température uniforme T. On note $P(z)$ la pression, z représentant désormais l'*altitude* mesurée depuis le sol. La pression au sol est P_S.

6. Déterminer dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$, la pression $P(z)$ de l'air. On note λ la longueur caractéristique qui apparaît dans l'expression de $P(z)$.
7. Réécrire λ et $P(z)$ en faisant apparaître la constante de Boltzman k_B ainsi que la masse effective m_a d'une « molécule d'air » définie comme le rapport $\frac{M}{N_\mathrm{A}}$.
8. En déduire le nombre de « molécules » par unité de volume $n^*(z)$ et interpréter le résultat.
9. Estimer la longueur λ pour l'air.

On recherche maintenant les conditions d'équilibre d'une particule solide dans l'atmosphère en ne considérant toujours que les forces de pesanteur et de pression. Le barycentre de la particule est situé à l'altitude z_P. Cette particule sphérique est supposée homogène, de masse volumique ρ_P, de rayon a inférieur au millimètre.

10. Établir une expression approchée de $P(z)$ autour de l'altitude z_p.
11. En déduire la résultante $\overrightarrow{F_\mathrm{R}}$ des forces de pression sur la particule.
12. Quelle devrait être la masse volumique de la particule pour que $\overrightarrow{F_\mathrm{R}}$ puisse en compenser le poids ?
13. Comment peut-on expliquer que des poussières puissent rester en suspension dans l'air ?

C Probabilité de présence

Dans cette question, on suppose que la masse volumique ρ du fluide considéré est uniforme. La position de la particule solide est repérée par son altitude $z > 0$. On admet que la probabilité de trouver une particule solide de masse volumique $\rho_\mathrm{P} > \rho$ et de volume V, entre les altitudes z et $z + \mathrm{d}z$, est donnée par

$$\mathrm{d}\mathcal{P}(z) = A \exp\left(-\frac{(\rho_\mathrm{P} - \rho)\, V\, g\, z}{k_\mathrm{B}\, T}\right) \mathrm{d}z$$

où A est une constante.

14. Quelle est la valeur de $\int_{z=0}^{z=\infty} \mathrm{d}\mathcal{P}(z)$?
15. En déduire la valeur de la constante A.
16. L'altitude moyenne z_m de la particule est donnée par l'intégrale

$$z_\mathrm{m} = \int_{z=0}^{z=\infty} z\, \mathrm{d}\mathcal{P}(z)$$

Calculer z_m.

On s'intéresse à une particule solide de rayon a dans un fluide qui occupe tout l'espace $z > 0$. La surface définie par $z = 0$ correspond à une interface solide. On considère que la particule est en suspension si son altitude moyenne est supérieure à son rayon.

17. Déterminer la valeur limite a_ℓ du rayon d'une particule en suspension. On exprimera a_ℓ en fonction de k_B, T, ρ_P, ρ et g.
18. On se place à une température de 20 °C. Calculer ce rayon limite pour une particule d'oxyde de silice de masse volumique $\rho_\mathrm{P} = 2{,}6 \cdot 10^3\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, en suspension dans l'eau, puis dans l'air.
19. Quelle devrait être la masse volumique d'une particule de 10 µm de rayon pour qu'elle soit en suspension dans l'eau ?

Données : $k_\mathrm{B} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$, $\rho_\mathrm{eau} = 1{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$; $\rho_\mathrm{air} = 1{,}3\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$