PSI* 2023/24 DL 9

# Matrices de Hurwitz

**L'usage de la calculatrice était interdit. Faire I et II pour lundi 15 si possible (sinon mercredi 17).**

## Notations

— $n$ désigne un entier naturel non nul.

— $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

— $M_n(\mathbf{K})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n$ et à coefficients dans $K$ et, pour une matrice $M$ de $M_n(\mathbf{K})$, on note $\chi_M$ son polynôme caractéristique.

— $\mathbf{K}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}, \mathbf{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.

— $\mathrm{Re}^- = \{z \in \mathbf{C} / \mathrm{Re}(z) < 0\}$.

— On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^n$ et $\| \cdot \|$ sa norme associée :

$$\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \& \qquad \|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

— On confondra abusivement, pour le calcul matriciel, le vecteur $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{K}^n$

avec la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

— Pour $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{C}^n$, on notera son conjugué $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$, sa partie réelle $\mathrm{Re}(X) = \dfrac{X + \overline{X}}{2}$ et sa partie imaginaire $\mathrm{Im}(X) = \dfrac{X - \overline{X}}{2i}$.

— Si $M \in M_n(\mathbf{R})$, et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à $M$ est $\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \to & \mathbf{K}^n \\ X & \mapsto & MX. \end{array}$

## Rappels

1. Deux matrices $A$ et $B$ de $M_n(\mathrm{K})$ sont semblables dans $M_n(\mathrm{K})$ si il existe une matrice $P$ de $M_n(\mathrm{K})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Deux matrices $A$ et $B$ de $M_n(\mathbf{R})$ sont semblables dans $M_n(\mathbf{C})$ si il existe une matrice $P$ de $M_n(\mathbf{C})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
2. Soient $R$ et $S$ deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$.$R$ est un diviseur de $S$ s'il existe un polynôme $Q$ de $\mathbf{K}[X]$ tel que $S = QR$. Les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

## Objectifs

— Il s'agit d'établir pour un système différentiel linéaire d'ordre 1, une équivalence entre des propriétés qualitatives des solutions et des conditions portant sur la nature de la matrice asssociée à ce système et de son polynôme caractéristique.

- La partie 1 concerne l'étude de propriétés de matrices semi-simples.
- La partie 2 propose de trouver une caractérisation de matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$.
- La partie 3 est consacrée à l'étude des polynômes de Hurwitz.
- Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.
- La partie 4, sur l'équivalence anoncée pour les systèmes différentiels, utilise des résultats des parties 1 et 3 .

# I Matrices semi-simples

**Définition 1** *Une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ est dite semi-simple si elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$.*

**Définition 2** *Une matrice $M$ de $M_n(\mathbf{R})$ est dite presque diagonale s'il existe*

*i) deux entiers naturels $p$ et $q$ ;*
*ii) $q$ réels $a_1, a_2, \ldots, a_q$ ;*
*iii) $q$ réels non nuls $b_1, b_2, \ldots, b_i$ ;*
*iv) une matrice $D$ diagonale de $M_p(\mathbf{R})$ tels que $p+2q=n$ et $M$ est la matrice bloc suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & M(a_1,b_1) & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & M(a_2,b_2) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & M(a_q,b_q) \end{pmatrix}$$

*où, $\forall j \in [\![1;q]\!] : M(a_j,b_j) = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$. Si $p=0$, la matrice $D$ n'est pas présente dans la matrice diagonale par blocs $M$. De même, si $q=0$, alors $M=D$.*

Soit $A$ la matrice de $M_2(\mathbf{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

**1** ▷ La matrice $A$ est-elle semi-simple ?

Soit $B$ la matrice de $M_2(\mathbf{R})$ définie par $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

**2** ▷ Démontrer que $B$ est semi-simple et en déduire l'existence d'une matrice $Q$ de $M_2(\mathbf{R})$ inversible et de deux réels $a$ et $b$ à déterminer tels que :

$$B = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

*Indication : on pourra, pour un vecteur propre $V$ de $B$, introduire les vecteurs $W_1 = \mathrm{Re}(V)$ et $W_2 = \mathrm{Im}(V)$.*

Soit $M$ une matrice de $M_2(\mathbf{R})$.

On suppose dans la question 3) seulement que $M$ admet deux valeurs propres complexes $\mu = a+ib$ et $\overline{\mu} = a-ib$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}^*$.

**3** ▷ Démontrer que $M$ est semi-simple et semblable dans $M_2(\mathbf{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

**4** ▷ Démontrer que $M$ est semi-simple si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est satisfaite :

*i)* $M$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbf{R})$ ;

*ii)* $\chi_M$ admet deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle.

**5** ▷ Soit $N$ une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ semblable à une matrice presque diagonale. Démontrer que $N$ est semi-simple.

**6** ▷ Soit $N$ une matrice de $M_n(\mathbf{R})$. Donner la forme factorisée de $\chi_N$ dans $\mathbf{C}[X]$ en précisant, dans les notations, les racines réelles et les racines complexes conjuguées. En déduire que si $N$ est semi-simple alors elle est semblable dans $M_n(\mathbf{R})$ à une matrice presque diagonale.

# II Caractérisation de la diagonalisabilité dans $M_n(\mathbf{C})$

Dans cette partie, $E$ désigne un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $u$ désigne un endomorphisme de $E$.

On suppose dans les questions 7), 8) et 9) que $u$ est diagonalisable. On note $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de $u$. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, différent de $\{0_E\}$ et de $E$.

**7** ▷ Démontrer qu'il existe $k \in [\![1;n]\!]$ tel que $v_k \notin F$ et qu'alors $F$ et la droite vectorielle engendrée par $v_k$ sont en somme directe. On note alors

$$\mathcal{A} = \big\{H \text{ sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } u(H) \subset H \text{ et } F \cap H = \{0_E\}\big\} \qquad \text{et}$$
$$\mathcal{L} = \big\{p \in \mathbf{N}^*,\ \exists H \in \mathcal{A} : p = \dim(H)\big\}.$$

**8** ▷ Démontrer que $\mathcal{L}$ admet un plus grand élément que l'on nommera $r$.

**9** ▷ Démontrer que $F$ admet un supplémentaire $G$ dans $E$ stable par $u$.

**10** ▷ On suppose que tout sous-espace vectoriel de $E$ possède un supplémentaire dans $E$ stable par u. Démontrer que $u$ est diagonalisable. En déduire une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$.

*Indication : on pourra raisonner par l'absurde et introduire un sous-espace vectoriel, dont on justifiera l'existence, de dimension $n-1$ et contenant la somme des sous-espaces propres de $u$.*

# III Polynômes de Hurwitz

**Définition 3** *Un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ est dit* polynôme de Hurwitz *si ses racines dans $\mathbf{C}$ appartiennent à* $\mathrm{Re}^- = \{z \in \mathbf{C} / \mathrm{Re}(z) < 0\}$.

**Définition 4** *Un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ est dit* à coefficients strictement positifs *s'il est non nul et si, $d$ désignant son degré, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où, pour tout $k \in [\![0,d]\!]$, $a_k > 0$.*

**11** ▷ Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Démontrer que si $\alpha$ est une racine d'un polynôme $P$ de $\mathbf{R}[X]$ à coefficients strictement positifs, alors $\alpha < 0$.

**12** ▷ Démontrer que tout diviseur d'un polynôme de Hurwitz est un polynôme de Hurwitz.

**13** ▷ Soit $P$ un polynôme de Hurwitz de $\mathbf{R}[X]$ irréductible et à coefficient dominant positif. Démontrer que tous les coefficients de $P$ sont strictement positifs.

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$. On définit les deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $\mathbf{C}[X]$ par :

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k) \quad \text{et} \quad Q(X) = \prod_{(k,l) \in [\![1;n]\!]^2} (X - z_k - z_l)\,.$$

**14** ▷ On suppose $n = 2$ et $P \in \mathbf{R}_2[X]$. Si les coefficients de $Q$ sont strictement positifs, $P$ est-il alors un polynôme de Hurwitz ?

**15** ▷ Soient $A$ et $B$ deux polynômes de $\mathbf{R}[X]$ dont tous les coefficents sont strictement positifs. Démontrer que les coefficients du produit $AB$ sont également strictement positifs.

**16** ▷ Démontrer que si $P$ et $Q$ sont dans $\mathbf{R}[X]$, alors on a l'équivalence : $P$ est un polynôme de Hurwitz si, et seulement si, les coefficients de $P$ et $Q$ sont strictement positifs.

# IV Système différentiel de matrice associée semi-simple

Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. On note $(S)$ le système différentiel $(S)$ $X' = MX$, où $X$ est une application de la variable $t$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$, dérivable sur $\mathbf{R}$.

Soit $T \in M_n(\mathbf{R})$. On suppose que $M$ est semblable à $T$ dans $M_n(\mathbf{R})$ et l'on note $(S^*)$ le système différentiel $(S^*)$ $Y' = TY$.

**17** ▷ Démontrer que les coordonnées d'une solution $X$ de $(S)$ sont combinaisons linéaires des coordonnées d'une solution $Y$ de $(S^*)$.

Dans les deux questions suivantes 18) et 19), on suppose $n = 2$, on note alors $X = (x; y)$ où $x$ et $y$ sont deux fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et l'on pose $z = x + iy$.

On suppose qu'il existe $a$ et $b$ réels tels que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

**18** ▷ Démontrer que $X$ est solution de $(S)$ si, et seulement si, $z$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à déterminer. En déduire une expresssion des coordonnées des solutions de $(S)$ en fonction de $t$.

Résoudre le système $X' = BX$ où $B$ est la matrice de la question 2).

**19** ▷ Soit $M \in M_2(\mathbf{R})$ semi-simple. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur les parties réelles et imaginaires des valeurs propres de $M$, pour que toute solution de $(S)$ ait chacune de ses coordonnées qui tende vers 0 en $+\infty$.

On reprend le cas général $n \geqslant 2$ et on considère les assertions suivantes :

$\mathbf{A}_1$ $\chi_{_M}$ est un polynôme de Hurwitz ;

$\mathbf{A}_2$ Les solutions de (S) tendent vers $0_{\mathbf{R}^n}$ quand $t$ tend vers $+\infty$ ;

$\mathbf{A}_3$ Il existe $\alpha > 0$, il existe $k > 0$ tels que pour toute solution $\Phi$ de $(S)$,

$$\forall t \geqslant 0 \quad : \quad \|\Phi(t)\| \leqslant k\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\|\Phi(0)\|.$$

Soit $T \in M_n(\mathbf{R})$. On suppose que $T$ vérifie la condition suivante :

$$\text{(C)} \quad \exists \beta \in \mathbf{R}_+^*, \forall X \in \mathbf{R}^n : \langle TX, X\rangle \leqslant -\beta\|X\|^2.$$

**20** ▷ Démontrer que $\mathbf{A}_3$ est vraie avec $k = 1$ pour toute solution $\Phi$ de $(S^*)$.

*Indication : on pourra introduire la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{2\beta t}\|\Phi(t)\|^2$.*

**21** ▷ On suppose que $M \in M_n(\mathbf{R})$ est semi-simple. Démontrer que les assertions $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ et $\mathbf{A}_3$ sont équivalentes.

*Indication : on pourra commencer par montrer que $\mathbf{A}_3$ implique $\mathbf{A}_2$.*