PSI* 2017/18 - DL 3, correction pour la version 1

Source : portion de X Cachan PSI 2007.

Partie 1

1. La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$. On peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale à tout ordre entre les points 0 et 1. On a $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, puis par récurrence sur l'entier $k > 0$, on prouve $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.

C'est vrai pour $k = 1$. Si on suppose la formule vraie au rang k, en la dérivant on obtient la formule au rang $k+1$. La propriété est donc vraie pour $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi

$$f(1) = \ln 2 = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!} f^{(n+1)}(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \int_0^1 \frac{(-1)^n(1-s)^n}{(1+s)^{n+1}}\,\mathrm{d}s.$$

On forme la différence entre $\ln 2$ et le terme sous forme de somme : le terme intégral obtenu se majore par l'inégalité de la moyenne

$$\delta_n = \left| \ln 2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| \leq \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{(1+s)^{n+1}}\,\mathrm{d}s \leq \int_0^1 (1-s)^n\,\mathrm{d}s,$$

puisque pour $s \in [0,1]$ on a $1 + s \geq 1$. Finalement la différence δ_n vérifie $0 \leq \delta_n \leq \frac{1}{n+1}$. Par le théorème d'encadrement, on conclut : la suite (δ_n) est convergente, de limite nulle, ce qui permet d'écrire $\boxed{\ln 2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.}$

2. La série de terme général $s_k = \frac{(-1)^k}{k+1}$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées. En effet le signe de s_k alterne et sa valeur absolue $|s_k| = \frac{1}{k+1}$ est décroissante et de limite nulle.

On en déduit que le reste $R_N = \sum_{k=N+1}^{+\infty} s_k$ est majoré par $|R_N| \leq |s_{N+1}| = \frac{1}{N+2}$.

Ainsi $\boxed{\text{la somme partielle } S_N = \sum_{k=0}^{N} s_k \text{ est une valeur approchée de } \ln 2 \text{ à } \frac{1}{N+2} \text{ près.}}$ Il suffit d'imposer $\frac{1}{N+2} < \varepsilon$, soit $N > \frac{1}{\varepsilon} - 2$, pour obtenir une précision convenable.

3. On utilise la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ pour encadrer $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, du moins pour $k > 1$. On somme les encadrements obtenus pour k compris entre 2 et n. Pour $k = 1$, on n'effectue que la minoration :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t,$$

puis en soustrayant le logarithme :

$$\boxed{0 \leq \ln(n+1) - \ln n \leq u_n \leq 1.}$$

4. On forme la différence : en se rappelant l'origine des termes en $\ln n$, on fait réapparaître les intégrales précédentes :

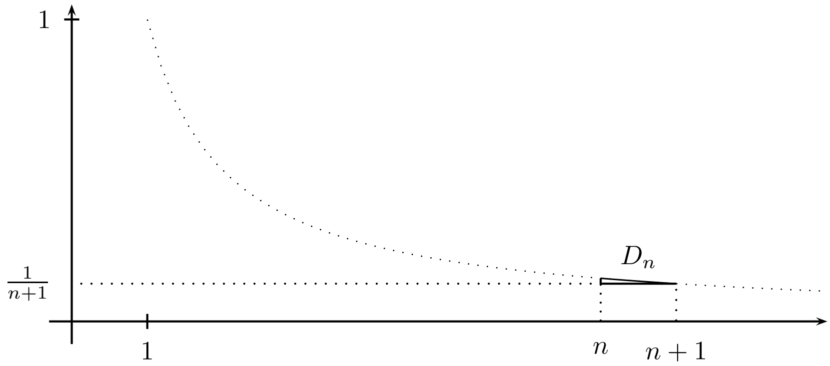
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq 0.$$

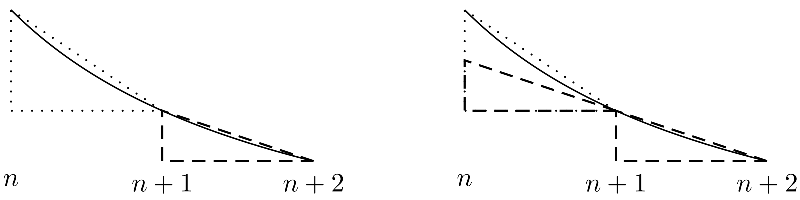
$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est une suite de réels décroissante et minorée par } 0\,;\text{ elle est donc convergente.}}$
On peut donc introduire le réel $\gamma = \lim u_n$; il vérifie $\gamma \in [0,1]$.

5. Pour la lisibilité, on prend une échelle différente en x et en y :

L'aire de D_n est $A_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n+1} = u_n - u_{n+1}$ d'après le calcul de la question 3.

6. Notons $f : t \mapsto \frac{1}{t}$. En reprenant le dessin, les deux termes entre lesquels il est demandé d'encadrer l'aire A_n sont des aires de vrais triangles (base $=$ 1 fois hauteur, divisé par 2) : le triangle formé de tirets d'une part, celui avec des pointillés d'autre part.





Graphiquement, le graphe de la fonction f semble situé entre les abscisses n et $n+1$ se trouve au-dessous de la corde qui relie les points $(n, f(n))$ et $(n+1, f(n+1))$. Si on admet ce fait (propriété dite de concavité), on en déduit que A_n est inférieure à l'aire du triangle formé de pointillés.

7. On procède à une sommation télescopique :

$$u_n - u_{n+p+1} = \sum_{k=0}^{p}(u_{n+k} - u_{n+k+1}) \leq \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1}\right).$$

En passant à la limite en p, on trouve $u_n - \gamma \leq \frac{1}{2n}$.
On fait de même avec les minorations : tout est identique à un décalage d'indice près, soit $u_n - \gamma \geq \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n(n+1)}$.

On a prouvé pour tout $n > 0$, $\boxed{u_n - \frac{1}{2n} \leq \gamma \leq u_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(n+1)}.}$

Remarque : du point de vue de l'analyse asymptotique, cela apporte notamment une amélioration de la "formule d'Euler". En effet on a trouvé $\gamma = u_n - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, soit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

8. L'amplitude de l'encadrement de la question 7. vaut $\frac{1}{2n(n+1)}$.

Ainsi $\boxed{\text{la quantité } u_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n(n+1)} \text{ est une valeur approchée de } \gamma \text{ à } \frac{1}{4n(n+1)} \text{ près.}}$

Il s'agit d'une approximation à ε près dès lors que $\frac{1}{4n(n+1)} < \varepsilon$. Par exemple, il suffit d'avoir $\frac{1}{4n^2} < \varepsilon$, soit $n > \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$.

Partie 2

1. Il s'agit d'une variante de Cesàro... On note α_n le terme étudié.
On considère un réel $\varepsilon > 0$. Alors il existe un entier K tel que pour $k > K$, on a $|a_k| < \varepsilon$. Ainsi pour $n > K$,

$$|\alpha_n| \leq \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k}\left(\left|\sum_{k=0}^{K} \lambda_k a_k\right| + \sum_{k=K+1}^{n} \lambda_k |a_k|\right) \leq \frac{A_K}{\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k} + \frac{\sum\limits_{k=K+1}^{n} \lambda_k . \varepsilon}{\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k} \leq \frac{A_K}{\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k} + \varepsilon,$$

avec $A_K = \sum\limits_{k=0}^{K} \lambda_k a_k$, valeur qui ne dépend pas de n. Ainsi le membre de droite de cette inégalité admet ε pour limite. Par suite, en prenant n suffisamment grand ($n > N_0$), ce membre est inférieur à 2ε : $n > N_0 \Rightarrow |\alpha_n| < 2\varepsilon$.

On a prouvé que $\boxed{\text{la suite } (\alpha_n) \text{ admet une limite nulle.}}$

2. On prouve par récurrence sur n que les composantes de $\Delta^n u$ sont bien celles indiquées.
Si $n = 0$, $\Delta^0 u = u$, donc $(\Delta^0 u)_k = u_k$, ce qui est le formule souhaitée.

On suppose que pour un certain entier n, les composantes de $\Delta^n u$ sont $(\Delta^n u)_k = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+i}$. Alors

$$(\Delta^{n+1}u)_k = (\Delta(\Delta^n u))_k = (\Delta^n u)_k - (\Delta^n u)_{k+1} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+i} - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+i+1}.$$

On réindexe et on fait apparaître la formule de Pascal :

$$(\Delta^{n+1}u)_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+i} - \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \binom{n}{i-1} u_{k+j} = u_k + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) u_{k+i} + (-1)^{n+1} u_{k+n+1}$$

Finalement, $(\Delta^{n+1}u)_k = \sum\limits_{i=0}^{+1} n(-1)^i \binom{n+1}{i} u_{k+i}$.

La récurrence est achevée : pour tous entiers k et n, $\boxed{(\Delta^n u)_k = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+i}.}$

3. Pour n fixé, $\Delta^n u$ est une somme d'un nombre fini fixé de termes de limite nulle en l'infini (c'est une combinaison linéaire de suites extraites de u). Donc $\boxed{\text{les termes } (\Delta^n u)_k \text{ ont une limite nulle lorsque } k \text{ tend vers l'infini, } n \text{ fixé.}}$

Si, au contraire, on fixe k, on voudrait appliquer la question 1 avec $\lambda_i = \binom{n}{i}$ et $\tilde{a}_i = (-1)^i a_{k+i}$ pour tenir le rôle de la suite a_i. Il y a un hic : noter cela λ_i est malhonnête car ce terme dépend de n !

On peut cependant suivre exactement la même démarche : la suite $(\tilde{a}_i)$ tend vers 0. Les réels $\lambda_{i,n}$ sont strictement positifs, avec $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_{i,n} = 2^n$, qui tend vers $+\infty$. En procédant parfaitement à l'identique, on obtient donc le même résultat.

Ainsi, $\boxed{\text{pour } k \text{ fixé, } \frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} \text{ a une limite nulle quand } n \text{ tend vers l'infini.}}$

4. La formule fait peut-être peur à première vue, mais c'est un vulgaire télescopage :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n^{(k)} = (-1)^k \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(\Delta^{n+1} a)_k}{2^{n+1}} \right) = (-1)^k \left(\frac{(\Delta^0 a)_k}{1} - \frac{(\Delta^{N+1} a)_k}{2^{N+1}} \right) = (-1)^k \left(a_k - \frac{(\Delta^{N+1} a)_k}{2^{N+1}} \right).$$

D'après la question précédente, lorsque N tend vers l'infini, l'expression entre parenthèses converge vers a_k, donc $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^{(k)} = (-1)^k a_k.}$

Par ailleurs, avec la définition de Δ^{n+1}, le terme $a_n^{(k)}$ s'exprime comme

$$a_n^{(k)} = (-1)^k \left[\frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} - \frac{(\Delta^n a)_k - (\Delta^n a)_{k+1}}{2^{n+1}} \right] = \frac{(-1)^k (\Delta^n a)_k}{2^{n+1}} - \frac{(-1)^{k+1} (\Delta^n a)_{k+1}}{2^{n+1}}.$$

On peut donc se livrer à un nouveau télescopage :

$$\sum_{k=0}^{K} a_n^{(k)} = \frac{(\Delta^n a)_0}{2^{n+1}} - \frac{(-1)^{K+1} (\Delta^n a)_{K+1}}{2^{n+1}}.$$

Cette fois, la limite est $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_n^{(k)} = \frac{(\Delta^n a)_0}{2^{n+1}}.}$

5. On reprend le calcul télescopique :

$$r_m^{(k)} = \sum_{n=m}^{+\infty} a_n^{(k)} = (-1)^k \sum_{n=m}^{+\infty} \left(\frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} - \frac{(\Delta^{n+1} a)_k}{2^{n+1}} \right) = (-1)^k \frac{(\Delta^m a)_k}{2^m}.$$

Le terme général $r_m^{(k)}$ s'écrit donc comme une somme finie :

$$r_m^{(k)} = \sum_{i=0}^{m} \left((-1)^i \binom{m}{i} 2^{-m} \right) (-1)^k a_{k+i}.$$

L'entier m est fixé. On peut donc considérer que le terme entre parenthèses est un coefficient et qu'il s'agit d'une combinaison linéaire des séries $\sum(-1)^k a_k, \sum(-1)^k a_{k+1}, \dots, \sum(-1)^k a_{k+m}$.

La série $\sum(-1)^k a_k$ est convergente puisqu'elle vérifie le théorème des séries alternées ((a_n) est une suite décroissante de limite nulle). Mais il en est de même pour $\sum(-1)^k a_{k+1}, \dots, \sum(-1)^k a_{k+m}$, et, par linéarité, pour $\sum r_m^{(k)}$.

On peut donc définir $\boxed{R_m = \sum_{k=0}^{+\infty} r_m^{(k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(\Delta^m a)_k}{2^m}.}$

6. On reprend la propriété de linéarité précédente :

$$R_m = \sum_{k=0}^{+\infty} r_m^{(k)} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} 2^{-m} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_{k+i} \right) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} 2^{-m} A_i,$$

en notant $A_i = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_{k+i} = (-1)^i \sum_{k=i}^{+\infty} (-1)^k a_k$.

On aboutit à une expression qui rappelle la question 3., avec la suite A_i remplaçant la suite a_i. Vérifions qu'elle a la bonne propriété : suite convergeant vers 0. Le théorème des séries alternées permet de majorer $|A_i| \le |a_{i+1}|$. Donc la suite (A_i) a une limite nulle, et enfin, en appliquant la même démarche qu'en question 3., mutatis mutandis, on obtient $\boxed{\lim_{m \to +\infty} R_m = 0.}$

Par ailleurs, on calcule

$$r_0^{(k)} - r_{n+1}^{(k)} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p^{(k)} - \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p^{(k)} = \sum_{p=0}^{n} a_p^{(k)}.$$

On effectue la somme de ces séries, en sommant sur k. Puisque toutes les séries en jeu convergent, on peut appliquer de nouveau la linéarité :

$$R_0^{(k)} - R_{n+1}^{(k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n} a_p^{(k)} = \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{+\infty} a_p^{(k)} = \sum_{p=0}^{n} \frac{(\Delta^p a)_0}{2^{p+1}}.$$

On a prouvé : $\boxed{\sum_{m=0}^{n} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} = R_0 - R_{n+1}.}$

7. On peut passer à la limite en n dans la formule qui vient d'être établie : la série de terme général $\left(\frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ est convergente et a pour somme R_0.

Mais comme $r_0^{(k)} = (-1)^k a_k$ (calcul de la question 4.), on a $R_0 = S$.

Finalement $\boxed{S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}}.}$

Remarque sur la démarche : on vient de procéder à une interversion de sommes infinies, en prenant comme intermédiaire une interversion de sommes finies et en exploitant le théorème des séries alternées comme argument de convergence. Le lemme 3. joue un rôle crucial dans l'étude, pour appliquer le TSA aux sommes A_i.

8. Vu le signe des dérivées, la fonction f est décroissante, la fonction f' croissante, f'' décroissante, etc.

On souhaite utiliser une forme de récurrence : la suite a a des termes de la forme $a_k = f(k)$. Mais la suite Δa a des termes de la forme $a_k - a_{k+1} = g(k)$ en posant $g(x) = f(x) - f(x+1)$.

On introduit donc la notation Δf pour la fonction $x \mapsto f(x) - f(x+1)$. Cela définit un opérateur Δ sur les fonctions, généralisant celui de la question 2. On peut l'itérer pour définir Δ^n et, par un calcul rigoureusement identique à celui fait en question 2.,

$$(\Delta^n f)(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} f(x+i) \qquad (\sharp).$$

Ainsi la suite $\Delta^n a$ a pour terme d'ordre k : $(\Delta^n a)_k = (\Delta^n f)(k)$.

On étudie le signe des dérivées de Δf : $(\Delta f)^{(j)}(x) = f^{(j)}(x) - f^{(j)}(x+1)$. Si j est pair, comme $f^{(j)}$ est décroissante, on a $(\Delta f)^{(j)}(x) \ge 0$. Si j est impair, au contraire $(\Delta f)^{(j)}(x) \le 0$.

Ainsi la fonction Δf vérifie la même propriété que f :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad (-1)^j (\Delta f)^{(j)}(x) \ge 0.$$

Par suite, $\Delta^2 f = \Delta(\Delta f)$ vérifie aussi cette propriété, et par récurrence, $\Delta^n f$ la vérifie également. On a notamment $\boxed{(\Delta^n a)_k = (\Delta^n f)(k) \ge 0.}$

On a par ailleurs $(\Delta f)(x) = f(x) - f(x+1) \leq f(x)$ puisque $f(x+1) \geq 0$. Plus généralement, $(\Delta^n f)(x) = (\Delta^{n-1} f)(x) - (\Delta^{n-1} f)(x+1) \leq (\Delta^{n-1} f)(x)$ puisque $(\Delta^{n-1} f)(x+1) \geq 0$. Notamment, pour $x = 0$, cela donne

$$\boxed{0 \leq \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} \leq \frac{a_0}{2^{m+1}}.}$$

Commentaire : on vient d'étudier un procédé d'accélération de convergence qui s'applique à toute une famille de séries alternées (notamment les séries de Riemann alternées). On peut obtenir la somme S en sommant la série de la question 7. Les termes de cette nouvelle série avancent vers 0 aussi vite qu'une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

9. Tout d'abord la suite (a_k) vérifie les hypothèses demandées : on prend $f(x) = \frac{1}{x+1}$, et d'après les préliminaires, les dérivées successives de f sont alternativement de signe toujours positif et toujours négatif. Ici, $S = \ln 2$.

Le reste de la série peut être majoré en comparant à une série géométrique :

$$0 \leq \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} \leq a_0 \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi pour obtenir une somme partielle qui soit une valeur approchée avec une précision ε, il suffit de faire en sorte que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. La valeur de n à considérer est à nouveau de l'ordre de $|\ln \varepsilon|$, ce qui est une amélioration par rapport à la première partie.

Remarque : on peut exprimer la nouvelle série, obtenue en accélérant la série harmonique alternée :

$$\begin{aligned}
\ln 2 &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \frac{1}{i+1} \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+1}(m+1)} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \frac{(m+1)!}{(m-i)!(i+1)!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+1}(m+1)} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m+1}{i+1} \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+1}(m+1)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^m m}.
\end{aligned}$$

On peut aussi prouver cette formule en employant la relation de Taylor-Lagrange pour exprimer $\ln(1 - \frac{1}{2}) = -\ln 2$.

Partie 3

1. Le terme b_k est bien défini (intégrale d'une fonction continue sur segment), positif par positivité de l'intégrale. On connaît également le signe de $b_{k+1} - b_k = \int_0^1 x^k (x-1) w(x)\,\mathrm{d}x$: c'est négatif.

Ainsi la suite (b_k) est décroissante et minorée par 0 ; elle converge, mais on ne peut pas affirmer que c'est vers 0 avec ces éléments. On majore donc : puisque w est continue sur un segment, elle admet une borne supérieure W et par positivité de x^k, on a

$$\forall x \in [0,1], x^k w(x) \leq x^k W \qquad \text{d'où } 0 \leq b_k \leq \int_0^1 x^k W \,\mathrm{d}x \leq \frac{W}{k+1}$$

$\boxed{\text{Par encadrement, la suite } (b_k) \text{ converge vers 0 (en décroissant).}}$

2. Cherchons la fameuse relation sur les T_n :

$$T_{n-1}(x) + T_{n+1}(x) = \cos((n-1)\arccos x) + \cos((n+1)\arccos x) = 2\cos(\arccos x)\cos(n \arccos x) = 2xT_n(x)$$

Avec par ailleurs $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$.

On tente de prouver $P_n(X) = T_n(1-2X)$: on a bien la propriété pour $P_0(X) = 1 = T_0(1-2X)$ et $P_1(X) = 1 - 2X = T_1(1-2X)$.

Supposons qu'elle est vraie aux rangs $n-1$ et n, alors

$$T_{n+1}(1-2X) = 2(1-2X)T_n(1-2X) - T_{n-1}(1-2X) = P_{n+1}(X)$$

On a ainsi prouvé la relation $\boxed{P_n(X) = T_n(1-2X).}$

3. J'admets $P_n(x) = \sum\limits_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n}{n+m} \binom{n+m}{2m} 2^{2m} x^m$.

Soit $n > 0$. On remarque notamment que $P_n(-1) = \sum\limits_{m=0}^{n} \frac{n}{n+m}\binom{n+m}{2m}2^{2m}$, qui est une somme de termes strictement positifs. Ainsi $\boxed{P_n(-1) > 0.}$

4. On calcule

$$s(n) = \frac{1}{P_n(-1)}\int_0^1 \frac{P_n(-1) - P_n(x)}{(1+x)} w(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{P_n(-1)}\int_0^1 \frac{\sum\limits_{m=0}^{n} \frac{n}{n+m}\binom{n+m}{2m}2^{2m}(1-(-x)^m)}{(1+x)} w(x)\,\mathrm{d}x$$

On est amené à factoriser

$$s(n) = \frac{1}{P_n(-1)}\int_0^1 \frac{\sum\limits_{m=0}^{n}\left(\frac{n}{n+m}\binom{n+m}{2m}2^{2m}(1+x)\left(\sum\limits_{j=0}^{m-1}(-x)^j\right)\right)}{(1+x)} w(x)\,\mathrm{d}x$$

pour pouvoir simplifier et, en utilisant la linéarité, réorganiser ainsi

$$\begin{aligned} s(n) &= \frac{1}{P_n(-1)}\sum_{0\le j<m\le n}\left[\frac{n}{n+m}\binom{n+m}{2m}2^{2m}\int_0^1 (-x)^j w(x)\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{P_n(-1)}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{m=j+1}^{n}\left(\frac{n}{n+m}\binom{n+m}{2m}2^{2m}\right)(-1)^j b_j \end{aligned}$$

Avec la convention sur les sommes vides, on peut faire varier l'indice de la première somme de 0 à n et ainsi

$$\boxed{s(n) = \frac{1}{P_n(-1)}\sum_{k=0}^{n} c_{n,k}(-1)^k b_k \qquad \text{avec} \qquad c_{n,k} = \sum_{m=k+1}^{n}\frac{n}{n+m}\binom{n+m}{2m}2^{2m}}$$

5. On a déjà dit que que $P_n(-1) = \sum\limits_{m=0}^{n} \frac{n}{n+m}\binom{n+m}{2m}2^{2m}$, mais il s'agit d'expliciter sa valeur. Il est donc plus judicieux de partir de la formule de récurrence

$$P_{n+1}(-1) = 6P_n(-1) - P_{n-1}(-1)$$

Il s'agit d'une suite linéaire récurrente d'ordre 2 à coefficients constants, de polynôme compagnon

$$X^2 - 6X + 1 = (X-3)^2 - 8 = (X - 3 - \sqrt{8})(X - 3 + \sqrt{8})$$

En posant $u_n = P_n(-1)$, il reste à trouver les réels a et b tels que u_n est toujours égal à $a(3-\sqrt{8})^n + b(3+\sqrt{8})^n$. Avec les valeurs initiales $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, il vient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = P_n(-1) = \frac{1}{2}(3-\sqrt{8})^n + \frac{1}{2}(3+\sqrt{8})^n}$$

On veut maintenant calculer $|s(n) - S|$. Il y a deux écritures possibles : sous forme de sommes doubles, ou plus compact, sous forme d'intégrales. Du moins on sait écrire $s(n)$ comme une intégrale. Pour S, c'est la limite de

$$S_K = \sum_{k=0}^{K}(-1)^k b_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^{K}(-x)^k w(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-(-x)^{K+1}}{1+x} w(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{(-x)^{K+1}}{1+x} w(x)\,\mathrm{d}x$$

Déduisons-en que $S = \int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$. Il suffit de montrer que le second terme a une limite nulle lorsque K tend vers l'infini

$$\left|\int_0^1 \frac{(-x)^{K+1}}{1+x} w(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1 1 \times \sup_{t\in[0,1]} w(t) \times x^{K+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{K+2}\sup_{t\in[0,1]} w(t)$$

On forme enfin

$$|s(n) - S| = \left|\int_0^1 \left(Q_n(x) - \frac{1}{1+x}\right) w(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^1 \frac{P_n(x)}{P_n(-1)(1+x)} w(x)\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{u_n}\left|\int_0^1 T_n(1-2x)\frac{w(x)}{(1+x)}\,\mathrm{d}x\right|$$

On a fait réapparaître le polynôme T_n de la question 2, pour exploiter l'inégalité $|T_n(1-2x)| \leq 1$ pour $x \in [0,1]$. Ainsi

$$|s(n) - S| \leq \frac{1}{u_n} \left| \int_0^1 \frac{w(x)}{(1+x)} \,\mathrm{d}x \right| = \frac{S}{u_n} \leq \frac{2S}{(3+\sqrt{8})^n}$$

On a établi $\boxed{|s(n) - S| \leq \dfrac{2S}{(3+\sqrt{8})^n}.}$

6. On reconnaît dans les 4 premières lignes de code une boucle permettant de calculer le terme u_n en suivant la relation de récurrence d'ordre 2. Ce résultat est stocké dans la variable d1.

Pour justifier plus précisément on peut invoquer l'invariant de boucle "à la fin de l'étape k, d1 contient u_{k+2} et d0 contient u_{k+1}". Ainsi à la fin de l'étape $n-2$, on a bien d1 qui contient u_n.

Pour les lignes suivantes, on va justifier que le résultat produit est sn$=s(n)$. Pour cela on montre que la variable s contient les sommes successives $\sigma_j = \sum\limits_{j=0}^{k} c_{n,j}(-1)^j b_j$.

Il faudrait donc montrer qu'à la fin de l'étape j, la variable contient $(-1)^j c_{n,j}$.

On remarque que pour passer d'un coefficient au suivant, la relation est

$$(-1)^k c_{n,k} = (-1)^k c_{n,k-1} - \frac{n}{n+k} \binom{n+k}{2k} 2^{2k} = \beta_k - (-1)^{k-1} c_{n,k-1}$$

avec β_k qui vérifie lui-même

$$\beta_{k+1} = -\frac{n.(n+k)!2^{2k+2}}{(2k+2)!(n-k-1)!} = \frac{-n.(n+k-1)!(n+k)2^{2k}2^2(n-k)}{(2k)!(2k+1)(2k+2)!(n-k)!} = \frac{(n+k)(k-n)}{(k+\frac{1}{2})(k+1)} \beta_{k-1}$$

c'est exactement la formule qui permet de passer d'une valeur de b à la suivante. Tout est donc justifié : à la fon de chaque tour de boucle, b contient la valeur β_{k+1} et c contient la valeur $(-1)^k c_{n,k}$, tandis que s vaut σ_k.

En fin de compte, $\boxed{\text{quand l'algorithme s'achève, d1 contient } u_n \text{ et sn contient } s(n).}$

7. On prend pour w la fonction constante valant 1. Alors $b_k = \frac{1}{k+1}$ et $S = \ln 2$. Le sn fourni par l'algorithme est une valeur approchée de $\ln 2$ à $\frac{2\ln 2}{(3+\sqrt{8})^n}$ près.

$\boxed{\text{Il suffit donc de prendre } n \text{ tel que } \frac{2\ln 2}{(3+\sqrt{8})^n} < \varepsilon \text{ et de renvoyer le sn correspondant.}}$