**Exercice 1** Justifier l'existence puis déterminer la valeur des intégrales suivantes :
a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{4x^3 - x}\,\mathrm{d}x$. b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}t$. d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch} x}\,\mathrm{d}x$. e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{(\cos x)^3}{\sqrt{\cos(2x)}}\,\mathrm{d}x$.

**Exercice 2** *(ENSEA 21)* Soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$.
a) Justifier l'existence de $I$ et de $J$ puis montrer que $I = J$.
b) Calculer $I + J$. En déduire la valeur de $I$.

**Exercice 3** *(ENSEA 23)* Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.
Indication : calculer $u'(x)$ pour $u(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

**Exercice 4** *(Mines-Télécom 21)* Convergence puis calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - t\arctan(1/t)\big)\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 5** *(Mines-Ponts 23)* Convergence puis calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^3}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

**Exercice 6** *(CCINP 23)* Soit $f$ une application continue et décroissante de $[1, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$.
a) Montrer que si $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\int_{x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \to 0$ quand $x \to +\infty$.
b) En déduire que si $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ quand $x \to +\infty$.
c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

**Exercice 7** *(CCINP 23)* Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{nt}}{(1+\mathrm{e}^t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$.
a) Justifier l'existence de $I_n$ puis montrer que $I_n = \frac{1}{n2^n} + \frac{n-1}{n} I_{n-1}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.
b) On pose $J_n = nI_n$. Quelle relation de récurrence lie $J_n$ à $J_{n-1}$ ?
c) Calculer $J_1$ puis montrer que $J_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.
d) En déduire que $I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

**Exercice 8** *(Mines-Ponts 21)* Soit $f$ continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, telle que $f(x)$ tende vers 0 en $+\infty$.
a) Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge ssi $\int_0^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$ admet une limite quand $n \to +\infty$.
b) Qu'advient-il de cette équivalence sans l'hypothèse de convergence de $f(x)$ ?

**Exercice 9** *(Mines-Ponts 21)* Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que $f$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, puis donner expression de $f'$.
b) Trouver un équivalent de $f(x)$ quand $x$ tend vers $0$, et quand $x$ tend vers $+\infty$.
c) Montrer que $f$ est intégrable et déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

**Exercice 10** *(X-ENS 21)* Pour $a > 0$ on pose $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2 - \frac{a^2}{t^2}}\,\mathrm{d}t$ et $J(a) = a\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2 - \frac{a^2}{t^2}}}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
a) Justifier l'existence de $I(a)$ et $J(a)$ puis montrer que $I(a) = J(a)$ pour tout $a > 0$.
b) Montrer alors que $I(a) = \frac{\mathrm{e}^{-2a}}{2} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{a}{t^2}\right) \mathrm{e}^{-\left(t - \frac{a}{t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$.
c) En admettant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s = \sqrt{\pi}$, en déduire que $I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2a}$.