Exercice 1 *(Mines-Ponts 21)* Soit $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.
Déterminer (a,b) pour que la série de terme général u_n soit convergente et calculer alors la somme.

Exercice 2 *(CCINP 23)* Soit $\alpha > 1$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

a) Trouver un équivalent de R_n quand n tend vers l'infini.

b) Pour quelles valeurs de α la série de terme général R_n/S_n est-elle convergente ?

Exercice 3 *(Mines-Télécom 23)*
Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{(-1)^n+\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 4 *(Mines-Télécom 23)* Soit $a_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(\sin t)^{2n}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que la suite (a_n) est bien définie et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ (1+4n^2)a_n = (4n^2-2n)a_{n-1}$.

c) Soit $b_n = a_n\sqrt{n}$. Établir la convergence de la série de terme général $\ln\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)$.

d) Déterminer la nature de la série de terme général a_n.

Exercice 5 *(Mines-Télécom 23)*
On définit une suite par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

a) Montrer que la suite (u_n) est correctement définie et convergente.

b) Montrer que la série de terme général u_n^2 converge.

c) On pose $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. Montrer que la suite (v_n) converge et préciser sa limite.

d) En admettant le lemme de Cesaro : "Si (x_n) est une suite qui converge vers ℓ alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \to \ell$ quand $n \to +\infty$", trouver un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 6 *(CCINP 22)* Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,\pi[$ et $u_{n+1} = \sin u_n$.

a) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

b) Montrer que la série de terme général u_n^3 converge. (on pourra considérer $u_{n+1} - u_n$)

c) Montrer que la série de terme général u_n^2 diverge. (on pourra considérer $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$)

Exercice 7 *(CCINP 21)* Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on note (E_n) l'équation $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$.

a) Montrer que (E_n) admet une unique solution sur $[0,1]$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, que l'on notera u_n.

b) Déterminer la limite de la suite (u_n).

c) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

d) Quelle est la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$?

Exercice 8 *(Mines-Télécom 21)* Soit β un réel strictement positif.

a) Étudier la série de terme général $\frac{1}{n\ln^\beta(n)}$.

b) Pour $\beta > 1$, donner un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\ln^\beta(k)}$.

Exercice 9 *(Mines-Télécom 19)* Soit f une fonction continue et croissante de $]0,1]$ dans $\mathbf{R}_+$.
Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $u_n = f(\mathrm{e}^{-n})$ et $v_n = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Exercice 10 *(Mines-Ponts 19)*
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \cos\left(n^2\pi\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$.