Proposition 1 Un produit cartésien de **K**-espaces vectoriels possède une structure naturelle de **K**-espace vectoriel, de dimension égale à la somme des dimensions quand elles sont finies.

Définition 1 La *somme* d'une famille finie de sous-espaces $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ d'un espace E est l'image de l'application : $E_1 \times \cdots \times E_q \longrightarrow E$, $\left(x_1, \ldots, x_q\right) \longmapsto x_1 + \cdots + x_q$.
Lorsque cette application est injective, on dit que la somme est *directe*. On la note alors $\bigoplus_{i=1}^{q} E_i$ tandis que dans le cas général la somme est simplement notée $\sum_{i=1}^{q} E_i$.

Remarque 1 La somme d'une famille finie de sous-espaces est en fait le sous-espace engendré par leur réunion. Par ailleurs, la somme de deux sous-espaces est directe si et seulement si leur intersection est réduite au vecteur nul ; mais cela n'est plus valable pour trois sous-espaces !

Proposition 2 La dimension d'une somme de sous-espaces de dimensions finies est majorée par la somme des dimensions, avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Remarque 2 Si E est la somme directe de sous-espaces de dimensions finies, toute réunion de bases de ces sous-espaces constitue une base de E. Une telle base est dite *adaptée* à la somme directe. Inversement, si E est de dimension finie, toute partition d'une base de E fournit une décomposition de E en somme directe.

Définition 2 On dit qu'un sous-espace F d'un espace E est *stable* par $u \in \mathscr{L}(E)$ lorsque $u(F) \subset F$. En ce cas, l'endomorphisme *induit* par u sur F est $\widetilde{u} \colon F \to F \, ; \; x \mapsto u(x)$.

Remarque 3 Si $E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i$ et si $\mathscr{B}$ est une base adaptée, un endomorphisme stabilise chacun des E_i si et seulement si sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs.

Proposition 3 Si deux endomorphismes f et g commutent, alors le noyau de f est stable par g.

Définition 3 Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$, on pose $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$.

Proposition 4 On a : $(\lambda P + \mu Q)(u) = \lambda P(u) + \mu Q(u)$ et $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

Corollaire 1 L'ensemble des polynômes en u est une algèbre commutative.

Corollaire 2 Le noyau d'un polynôme en u est stable par u.

Remarque 4 L'existence d'un *polynôme annulateur* de u permet de calculer u^k pour tout $k \in \mathbf{N}$, par division euclidienne. Et, si u est inversible, d'obtenir u^{-1} par simple factorisation.
Enfin, si E est de dimension n, tout $u \in \mathscr{L}(E)$ admet un polynôme annulateur de degré $\leqslant n^2$.

Définition 4 On appelle *trace* d'une matrice carrée la somme de ses coefficients diagonaux.

Proposition 5 Si A et B sont deux matrices de formats compatibles, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Corollaire 3 Si deux matrices sont semblables alors elles ont la même trace.
Cela permet, en dimension finie, de définir la trace d'un endomorphisme.

Proposition 6 *Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs :*

Si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbf{K})$ et $C \in \mathscr{M}_q(\mathbf{K})$: $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & C\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q\end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$.

Proposition 7 Si $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des scalaires 2 à 2 distincts alors $P \mapsto \big(P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)\big)$ définit un isomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$.

Définition 5 La famille des *polynômes interpolateurs de Lagrange* en $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ est l'image réciproque de la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$ par cet isomorphisme. (C'est donc une base de $\mathbf{R}_n[X]$)

Proposition 8 Soit $a_0, a_1, \dots, a_n$ des scalaires 2 à 2 distincts et $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ les polynômes d'interpolation de Lagrange en ces points alors : $\forall P \in \mathbf{R}_n[X],\ P = P(a_0)L_0 + P(a_1)L_1 + \cdots + P(a_n)L_n$

Corollaire 4 $L_0 + L_1 + \cdots + L_n = 1$

Définition 6 La *matrice de Vandermonde* d'une famille de scalaires $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ est la matrice de passage de la base des polynômes interpolateurs de Lagrange vers la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$. Le *déterminant de Vandermonde* est le déterminant de cette matrice.

Remarque 5 Le déterminant de Vandermonde, $\mathrm{V}(a_0, a_1, \dots, a_n)$ se calcule par récurrence :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_1 - a_0 & a_1(a_1 - a_0) & \dots & a_1^{n-1}(a_1 - a_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n - a_0 & a_n(a_n - a_0) & \dots & a_n^{n-1}(a_n - a_0) \end{vmatrix} = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \big(a_j - a_i\big)$$

Remarque 6 Si $P \in \mathbf{K}[X]$ est unitaire (c-à-d de coefficient dominant égal à 1) et de degré n, alors :

$$\mathrm{V}(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^{n-1} & P(a_0) \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} & P(a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} & P(a_n) \end{vmatrix}.$$ Et $P(X) = \prod_{i=0}^{n-1}(X - a_i)$ permet alors de conclure :o)

Remarque 7 Plus généralement, si P_j est un polynôme unitaire de degré j pour $0 \leqslant j \leqslant n$:

$$\begin{vmatrix} P_0(a_0) & P_1(a_0) & \cdots & P_n(a_0) \\ P_0(a_1) & P_1(a_1) & \cdots & P_n(a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_0(a_n) & P_1(a_n) & \cdots & P_n(a_n) \end{vmatrix} = \mathrm{V}(a_0, a_1, \dots, a_n)$$

Remarque 8 Encore plus fort, si $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$, alors pour toute famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de polynômes de $\mathbf{R}_n[X]$ et toute famille de réels $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, on a :

$$\begin{vmatrix} P_0(a_0) & P_1(a_0) & \cdots & P_n(a_0) \\ P_0(a_1) & P_1(a_1) & \cdots & P_n(a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_0(a_n) & P_1(a_n) & \cdots & P_n(a_n) \end{vmatrix} = \mathrm{V}(a_0, a_1, \dots, a_n)\det_{\mathscr{C}}(P_0, P_1, \dots, P_n)$$