Exercice 1 *(Mines-Télécom 22)*
Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ puis étudier celle de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 *(Mines-Télécom 17)*

a) Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x^3)^{1/3}}$.

b) En posant $x = \frac{1}{1+t^3}$ puis $t = \frac{1}{u}$ montrer que $I = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-u+1}$, puis calculer I.

Exercice 3 *(Centrale 16)*

a) Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{x}{\ln(1-x)}\,\mathrm{d}x$.

b) Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

c) Pour $x > 0$ montrer que $\int_0^{x} \frac{\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t$, puis calculer I.

Exercice 4 *(Mines-Ponts 17)*

a) En posant $t = \arctan(u^2)$, justifier la convergence de $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$.

b) Poser ensuite $u = \frac{1}{v}$ pour établir que $I = \int_0^{+\infty} \frac{1+v^2}{1+v^4}\,\mathrm{d}v$.

c) Poser enfin $w = v - \frac{1}{v}$ pour déterminer la valeur de I.

Exercice 5 *(Centrale 19)*

a) Énoncer précisément le théorème d'intégration par parties.

b) Déterminer une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ sur $[0, +\infty[$.

c) Donner le domaine de définition puis trouver une expression de $I(x) = \int_1^{+\infty} x^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6 *(Mines-Ponts 18)* Pour $x > 0$ on pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b) Établir la convergence de $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Calculer $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.