Exercice 1 *(Mines-Télécom 23)*

a) Donner le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer l'image de l'endomorphisme représenté par A.

c) Déterminer le noyau de l'endomorphisme représenté par A.

Exercice 2 *(CCINP 23)*

a) Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbf{R}^{2n}\right)$ tel que $u^2 = 0$ et $\operatorname{rg}(u) = n$.
Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$. En déduire que u peut être représentée par $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

b) Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbf{R}^{3n}\right)$ tel que $u^3 = 0$ et $\operatorname{rg}(u) = 2n$.
Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u^2$. En déduire que u peut être représentée par $\begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

Exercice 3 *(CCINP 23)* Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, tels que $f^2 = g^2 = \operatorname{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

a) Montrer que g induit un isomorphisme de $\operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id})$ sur $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$.
En déduire que la dimension de E est paire.

b) Montrer que f et g peuvent être représentées dans une même base par $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

Exercice 4 *(CCINP 23)* Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E dont la matrice est A dans toute base de E.

a) Montrer que : $\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, $AP = PA$.

b) Montrer que : $\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $\exists \lambda \in \mathbf{R}$, $B - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

c) En déduire que : $\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $AB = BA$; puis, que f est une homothétie.

Exercice 5 *(Centrale 23)*

a) Montrer que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est de rang 1 ssi il existe Y et X dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nuls tels que $A = XY^\top$.

b) Soit A définie par $A_{i,j} = \sin(i+j)$. Déterminer le rang de A puis montrer qu'il existe C_1, C_2, D_1 et D_2 dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telles que $A = (C_1, C_2)(D_1, D_2)^\top$

Exercice 6 *(Mines-Ponts 23)* Soit (P) le plan d'équation $x - 2z - y = 0$ et u le vecteur $(1,2,1)$.

a) Donner la matrice de la projection vectorielle sur (P) de direction u.

b) Calculer l'image par cette projection de la droite (D) d'équations $x - y + z = 0$ et $2x + y - 2z = 0$.

Exercice 7 *(Mines-Ponts 22)*

a) Déterminer les formes linéaires f sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant : $\forall (M,N) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})^2$, $f(MN) = f(NM)$.

b) Déterminer $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, $\operatorname{tr}(AM) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(M)$.

Exercice 8 *(CCINP 22)* Soit $a \in \mathbf{R}$ et $\Phi\colon P \in \mathbf{R}[X] \mapsto (X-a)(P'(X) - P'(a)) - 2(P(X) - P(a))$.

a) Vérifier que Φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

b) Trouver le plus grand $k \in \mathbf{N}$ tel que $(X-a)^k$ divise $\Phi(P)$ pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$.

c) Déterminer le noyau et l'image de Φ.

Exercice 9 *(Navale 23)* Dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E, on considère un projecteur p et un endomorphisme u vérifiant $u^n = Id_E$. On suppose que l'image de p est stable par u et l'on pose $q = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$. Montrer que q est un projecteur dont le noyau est stable par u.

Exercice 10 *(ENS Paris-Saclay 23)*
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, admettant un polynôme annulateur Q tel que $Q(0) = 0$ et $Q'(0) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires.

Exercice 11 *(ENS Paris-Saclay 22)* On dit qu'une matrice est positive lorsque tous ses coefficients sont positifs. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ montrer que :
$[\forall V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}),\ AV \text{positif} \Longrightarrow V \text{positif}] \Longleftrightarrow [A \in GL_n(\mathbf{R}) \text{ et } A^{-1} \text{ est positive}]$

Exercice 12 *(Mines-Ponts 22)* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ défini par :
$f_A(M) = AM$. Déterminer la trace et le rang de f_A.

Exercice 13 *(Mines-Ponts 22)* Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par : $J_{i,i+1} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$;
tous les autres coefficients étant nuls. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ montrer l'équivalence des assertions :
(i) A est semblable à J (ii) $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$ (iii) $A^n = 0$ et $\mathrm{rg}(A) = n-1$

Exercice 14 *(Mines-Télécom 21)*
Soit F un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tel que toute matrice non nulle de F soit inversible. Soit A et B deux matrices non nulles de F. Montrer que $x \mapsto \det(xA - B)$ est polynomiale ; préciser son degré et son coefficient dominant. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que $\alpha A - B \notin GL_n(\mathbf{C})$. Conclusion?

Exercice 15 *(Centrale 2017)* Soit $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ avec $A \in GL_p(\mathbf{R})$.
Montrer que : $\mathrm{rg}(M) = p \Longleftrightarrow D = CA^{-1}B$.

Exercice 16 *(Mines-Télécom 21)*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$. Montrer que $\det(A) = 1$.

Exercice 17 *(Mines-Ponts 21)*
Montrer que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & x_2 & 1 & 0 \\ x_1^2 & 2x_1 & x_2^2 & 2x_2 & 2 \\ x_1^3 & 3x_1^2 & x_2^3 & 3x_2^2 & 6x_2 \\ x_1^4 & 4x_1^3 & x_2^4 & 4x_2^3 & 12x_2^2 \end{vmatrix}$ est nul si et seulement si $x_1 = x_2$.

Exercice 18 *(TPE-IVP 19)* Soit $(x, y, z) \in \mathbf{C}^3$ tel que $x^2 = yz$.
Calculer le déterminant de la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ définie par : $(A_n)_{i,i} = 2x$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; $(A_n)_{i,i-1} = y$ et $(A_n)_{i-1,i} = z$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$; les autres coefficients étant nuls.

Exercice 19 *(Mines-Ponts 2017)* Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Montrer que :
$\det(A) = \det(B) = \det(A-B) = \det(A+B) = 0 \Longrightarrow \forall (x, y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R},\ \det(xA + yB) = 0$.