Exercice 1 *(Mines-Télécom 22)* Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in]0,1[$ on pose $f_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}\ln x}{x^2-1}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est intégrable sur $]0,1[$. Soit $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Déterminer la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

c) Calculer $I_k - I_{k+1}$. En déduire que $I_n = \frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

Exercice 2 *(CCINP 14)*

Après avoir justifié son existence, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lfloor x\rfloor}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3 *(Polytechnique 19)*

Soit f une fonction continue de $[0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$, de carré intégrable, et $U : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que U est bornée sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que U est dérivable sur $[0,+\infty[$ puis simplifier $U'(x)+U(x)$.

c) En déduire que U est de carré intégrable sur $[0,+\infty[$.

Exercice 4 *(Mines-Télécom 13)* Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-8)^n}{(2n)!}$ est un réel strictement négatif.

Exercice 5 *(Mines-Ponts 17)* Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^n}$.

Exercice 6 *(Mines-Ponts 17)* Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $\displaystyle\prod_{2\leqslant k\leqslant n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{c}{\sqrt{n}}$.

Exercice 7 *(Mines-Ponts 22)* Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{C}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n) + \int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$.

b) On suppose que f' est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Montrer que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge.

c) Établir ainsi la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\sqrt{n}}{n^a}$ pour $a > \frac{1}{2}$.

Exercice 8 *(CCINP 22)*

Déterminer la nature de $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{n}\int_{n^2}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ puis de $\displaystyle\sum(-1)^n\int_0^n \mathrm{e}^{-n^2t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 Pour $n \geqslant 1$ soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

a) Justifier la convergence de la série de terme général u_n.

b) Pour $n \geqslant 1$ soit $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$. Montrer que $R_n \geqslant \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}$.

c) La série de terme général u_n satisfait-elle le critère spécial des séries alternées ?