Exercice 1 *(CCINP 22)*

a) Soit $p \in \mathbf{N}$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^p}{2^n}$ converge. On note S_p la valeur de la somme.

b) En développant $(n+1)^p$, exprimer S_p en fonction de $S_0, \dots, S_{p-1}$.

c) En déduire que $S_p \in \mathbf{N}$ pour tout $p \in \mathbf{N}$.

Exercice 2 *(CCINP 22)* Soit (u_n) une suite de réels définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}$.

a) Déterminer la limite de u_n puis la limite de nu_n.

b) Déterminer la nature de $\sum u_n$ et de $\sum (-1)^n u_n$.

Exercice 3 *(CCINP 19)* Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

a) Justifier la définition de la suite (u_n) et montrer qu'elle converge vers 0.

b) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n$. Montrer que la série de terme général v_n converge.

c) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $w_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Nature de la série de terme général w_n ?

d) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Nature de la série de terme général x_n ?

Exercice 4 *(ENSEA 23)* On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n$.

a) La règle de D'Alembert permet-elle de déterminer la nature de la série de terme général u_n ?

b) Soit $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/2}$. Déterminer $a > 0$ tel que $\ln(v_n) = \frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
En déduire la nature de la série de terme général $\ln(v_n)$.

c) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \sim \frac{C}{n^{3/2}}$.

Exercice 5 Soit A, B, C, D, quatre sous-espaces d'un espace vectoriel E.
Montrer que leur somme est directe si et seulement si : $(A+B) \cap (C+D) = (A+C) \cap (B+D) = \{0_E\}$.

Exercice 6 *(ENSEA 17)* Soit E un espace vectoriel de dimension n, $p \in [\![1, n]\!]$
et $H_1 \dots, H_p$ des hyperplans de E. Montrer que $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) \geqslant n - p$.
Indication : considérer $\Phi : H_1 \times \cdots \times H_p \to E^{p-1}$; $(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_2 - x_1, \dots, x_p - x_1)$.

Exercice 7 *(CCINP 22)*
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et f un endomorphisme d'un espace E, représenté par A dans une base $\mathscr{B}$.

a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$.

b) Trouver un vecteur de $\mathrm{Ker}(f^2)$ qui ne soit pas dans $\mathrm{Ker}(f)$.

c) Trouver une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle f soit représenté par $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

d) Montrer que si un endomorphisme g commute avec f alors $\mathrm{Ker}(f^2)$ est stable par g.

e) En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g tel que $g \circ g = f$.

Exercice 8 *(CCP 2018)* Soit E un $\mathbf{K}$-ev de dimension finie et f un endomorphisme de rang 1.

a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $f \circ f = \lambda f$.

b) Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ (ii) $f \circ f \neq 0$ (iii) $\exists \mu \in \mathbf{K}^*$ tel que μf soit un projecteur

Exercice 9 *(CCP 2018)* Soit p un projecteur et f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
Montrer que $p \circ f = f \circ p \iff \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont stables par f.