Définition 1 Un espace préhilbertien réel est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive) généralement noté $\langle x, y\rangle$ ou $x \cdot y$ ou $(x|y)$.
Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Exemple 1 Produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$.

Exemple 2 Produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{R})$.

Exemple 3 Produit scalaire défini par une intégrale.

Remarque 1 De l'identité remarquable (et immédiate) $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$
on déduit aisément l'identité du parallélogramme et les identités de *polarisation*.

Définition 2 Norme associée à un produit scalaire, distance d'un vecteur à une partie.

Proposition 1 Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.

Corollaire 1 Inégalité triangulaire et cas d'égalité.

Définition 3 L'orthogonal d'une partie A d'un espace préhilbertien, noté $A^\perp$,
est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A.
Deux sous-espaces F et G sont dits orthogonaux lorsque : $\forall x \in F,\ \forall y \in G,\ \langle x, y\rangle = 0$.

Remarque 2 F et G orthogonaux $\iff F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp$

Proposition 2 Pour toute partie non vide A d'un préhilbertien E, $A^\perp$ est un sous-espace de E.

Proposition 3 Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Remarque 3 Plus généralement, toute somme de sous-espaces 2 à 2 orthogonaux est directe.

Remarque 4 Expression des coordonnées et du produit scalaire dans une base orthonormée.
Expression des coefficients de la matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée.

Proposition 4 Tout sous-espace de dimension finie possède une base orthonormée.

Corollaire 2 Si F est un sous-espace de dimension finie, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires.
Du coup, la distance de x à F est atteinte en un point unique : le projeté orthogonal de x sur F.

Remarque 5 Si $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base orthonormée de F, la projection orthogonale de x sur F est : $p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle e_i, x\rangle \cdot e_i$. Elle peut aussi être obtenue en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_F(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de F.

Remarque 6 Projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u)^\perp$ et distance à un tel hyperplan.

Proposition 5 *(Théorème de représentation)*
Dans un espace euclidien, toute forme linéaire peut être représentée par un produit scalaire.

Proposition 6 (*Orthogonalisation de Gram-Schmidt*) Si $(e_1, \ldots, e_r)$ est une famille libre, il existe une famille orthogonale $(u_1, \ldots, u_r)$ vérifiant $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$.
De plus, une telle famille est unique à multiplication près de chacun des u_i par un scalaire non nul.