Exercice 1 *(Mines-Ponts 23)*

a) Calculer $\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbf{N}$.

b) Déterminer $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ minimisant $\int_0^1 x^2(\ln(x) - ax - b)^2\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 *(CCINP 23)* Soit $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ une famille de vecteurs unitaires distincts d'un espace euclidien de dimension n telle que : $\exists\, a \in \mathbf{R},\ \forall i \neq j,\ \langle u_i, u_j \rangle = a$.

a) Montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E.

b) Montrer que $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 0_E$ et que $a = -\frac{1}{n}$.

Exercice 3 *(Mines-Télécom 23)*
Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ on pose $\langle A, B \rangle = \sum_{k=0}^{3} a_k b_k$.

a) Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}_3[X]$.

b) Donner la dimension et une base de $F = \{P \in \mathbf{R}_3[X],\ P(1) = 0\}$.

c) Donner une base orthonormée de F.

Exercice 4 *(Centrale 23)* Dans $\mathbf{R}[X]$ on pose : $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1) Q^{(k)}(1)$.

a) Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

b) Montrer que la famille $((X-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}[X]$.

c) Déterminer l'orthogonal de $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 5 *(Centrale 23)* Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour P et Q dans $E = \mathbf{R}_n[X]$, on pose : $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a) Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

b) On note $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique.
Calculer $P_i(0)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$. (on pourra s'intéresser à $\langle P_i, P_i' \rangle$)

c) Déterminer la distance de 1 à $F = \{P \in E\,;\ P(0) = 0\}$.

Exercice 6 *(ENSEA 23)* Soit E l'espace des fonctions de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$.
Pour f et g dans E on pose : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 \big(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\big)\,\mathrm{d}t$.

a) Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

b) Soit $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f = f''\}$.
Monter que V et W sont supplémentaires et orthogonaux.

Exercice 7 *(Saint-Cyr 23)* Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille normée d'un espace euclidien E telle que : $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$. Montrer qu'alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 8 *(Mines-Ponts 19)*

a) Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

b) Montrer que l'ensemble $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ;\ (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

c) Déterminer une base orthonormée de $V^\perp$ puis calculer la distance de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à V.

Exercice 9 *(Mines-Ponts 19)*
Soit E un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormale de E.
Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4\,,\ 2e_2 + 3e_4)$.