**Exercice 1** *(Mines-Ponts 21)*
Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ de trace nulle et $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes.

a) $\mathscr{H}$ et $\mathscr{N}$ sont-ils des espaces vectoriels ?

b) Montrer que l'espace engendré par $\mathscr{N}$ est inclus dans $\mathscr{H}$.

c) Cette inclusion est-elle une égalité ?

**Exercice 2** *(Mines-Ponts 21)*
Soit $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

a) Montrer que $E$ est de dimension paire.

b) Montrer que pour tout vecteur $a \neq 0_E$, $(a, f(a))$ est une famille libre.
Dans la suite, on notera $F(a)$ l'espace vectoriel engendré par ces deux vecteurs.

c) Montrer qu'il existe des vecteurs $a_1, \ldots, a_n$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^n F(a_i)$.

**Exercice 3** *(ENSAM 2017)* Soit $E$ un espace vectoriel.
On suppose qu'il existe deux endomorphismes $f$ et $g$ de $E$ tels que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

a) Montrer que $E$ est de dimension infinie.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f \circ g^n - g^n \circ f = n\, g^{n-1}$.

c) On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $g^n = 0$. Montrer qu'alors $g = 0$.

**Exercice 4** *(Mines-Ponts 18)*
Calculer la trace et le déterminant de l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ défini par : $u(M) = M^T$.

**Exercice 5** *(Mines-Télécom 22)* Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$ et $J$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients sont tous égaux à 1. On pose $b_{i,j} = [A^{-1}]_{i,j}$ et $M = JA^{-1}$.

a) Expliciter les coefficients de $M$ et donner son rang.

b) Montrer que $\det(A - J) = \left(1 - \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} b_{i,j}\right) \det(A)$.

**Exercice 6** *(Mines-Télécom 22)* Pour $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$ et $n \in \mathbf{N}^*$ soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ définie par :
$A_{i,i} = a$ ; $A_{i,j} = b$ pour $j > i$ et $A_{i,j} = c$ pour $i > j$. Soit $J$ la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que $\det(xJ + A)$ est un polynôme de degré au plus 1. En déduire $\det(A)$.

**Exercice 7** *(CCP 18)* Soit $\Phi$ l'endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ défini par : $\Phi(P) = P(X+1) - P(X)$.

a) Déterminer le noyau de $\Phi$ puis montrer que $\Phi$ est surjectif.

b) Montrer que tout $Q \in \mathbf{R}[X]$ possède un unique antécédent $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$.