Exercice 1 *(CCINP 22)* Soit $a \in \mathbf{R}$. Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $f_n(x) = \dfrac{nx(x^2+a)}{nx+1}\,\mathrm{e}^{-x}$.

a) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$.

b) Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0,1]$ selon la valeur de a.

c) Soit $h > 0$. Montrer la convergence uniforme de (f_n) sur $[h,1]$ pour tout a.

Exercice 2 *(Mines-Télécom 23)*

a) Montrer que si la série de terme général $f_n(x)$ converge uniformément sur une partie A de $\mathbf{R}$, alors la suite de terme général $f_n(x)$ converge uniformément vers 0 sur A.

b) Soit $f_n(x) = nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

   i) Établir la convergence simple de la série de terme général $f_n(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

   ii) La convergence est-elle uniforme sur $[0,+\infty[$?

Exercice 3 *(CCINP 23)* Pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$ on pose $f_n(x) = x\mathrm{e}^{-\sqrt{n|x|}}$.

a) Calculer $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x)|$. Que peut-on en déduire ?

b) Montrer que la série de terme général $f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbf{R}$.
Y a-t-il convergence normale sur $\mathbf{R}$?

c) Soit $a > 0$. Établir la convergence uniforme de la série de terme général $f_n(x)$ sur $\mathbf{R}\setminus]-a,a[$.
Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbf{R}$?

Exercice 4 *(CCINP 23)* Pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $u_n(x) = \frac{\ln(1+x^2n^2)}{n^2\ln(1+n)}$.

a) Montrer que la série de terme général $u_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbf{R}$.

b) Montrer que la somme de la série est continue sur $\mathbf{R}$.

c) La série des dérivées converge-t-elle normalement sur $\mathbf{R}$?

d) Montrer que la série des dérivées converge uniformément sur $\mathbf{R}$.
(on pour cela effectuer une comparaison série intégrale)

Exercice 5 *(Mines-Télécom 23 ; Mines-Ponts 17)* Pour $x > 0$ on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+xn}$.

a) Montrer que l'on définit ainsi une application continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

b) Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$. c) Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbf{R}_+^*$.

Exercice 6 *(Mines-Télécom 23)* Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$.

a) Justifier la convergence, pour tout $x \in [0,1]$, de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

b) Montrer que S est dérivable sur $[0,1]$. Que vaut $S'(1)$?

Exercice 7 *(Mines-Ponts 22)* Soit $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$ pour $n \in \mathbf{N}$.

a) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de terme général $f_n(x)$ sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer cette intégrale.

c) Déterminer la limite de $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ quand n tend vers l'infini. Commentaire ?

Exercice 8 *(CCINP 22)* Soit $f : t \mapsto \mathrm{e}^t\ln(t)$.
Justifier l'intégrabilité de f sur $]0,1]$ puis montrer que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\,n!}$.

Exercice 9 *(ENSEA 23)* Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}n^x$.

a) Déterminer l'ensemble de définition D de S puis montrer que S est de classe C^∞ sur D.

b) Étudier le comportement de S aux extrémités de D.