Exercice 1 *(Mines-Ponts 15)* Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Montrer que $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geqslant 0$. *Indication :* Montrer que $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+\mathrm{i}B)\det(A-\mathrm{i}B)$.

Exercice 2 *(CCINP 22)* Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E et $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs de E.

a) Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des nombres réels. Montrer que : $\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\right\|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2\right)$.

b) En déduire que si $\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 < 1$ alors la famille $(e_i+u_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de E.

Exercice 3 *(CCINP 16)* Soit $(E,\langle .,.\rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E. On considère un automorphisme de E, f tel que :
$\forall (x,y)\in E\times E,\ \langle x,y\rangle = 0 \implies \langle f(x),f(y)\rangle = 0$.

a) Que dire de la famille $\mathscr{B}'=(f(e_1),\dots,f(e_n))$?

b) En calculant $\langle f(e_i)+f(e_j), f(e_i)-f(e_j)\rangle$ de deux façons différentes, montrer qu'il existe $a>0$ tel que $\|f(e_i)\|^2 = a^2$ pour tout i. Que dire de la famille $\frac{1}{a}\mathscr{B}'$?

Exercice 4 *(Mines-Ponts 16)* Soit $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbf{R}^n$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $(P,Q)\mapsto \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ soit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$. On suppose cette condition vérifiée dans la suite.

b) Donner une base orthonormée de $\mathbf{R}_n[X]$.

c) Déterminer l'orthogonal de $F=\{P\in\mathbf{R}_n[X] : \sum_{k=0}^n P(a_k)=0\}$.

d) Calculer la distance de X^n à F.

Exercice 5 *(Mines-Ponts 2021)* Soit $\varphi : x\mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.
On admet que φ est intégrable sur $\mathbf{R}$ et que son intégrale vaut $\sqrt{\pi}$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme H_n tel que :
$\forall x\in\mathbf{R},\ \varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\varphi(x)$. Préciser le degré et le coefficient dominant de H_n.

b) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$ en posant : $\langle P,Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

c) Montrer que, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ et tout $P\in\mathbf{R}[X]$, $\langle P,H_n\rangle = \langle P',H_{n-1}\rangle$.
En déduire que la famille (H_n) est orthogonale. Calculer $\|H_n\|^2$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.

Exercice 6 *(Mines-Ponts 2019)* Soit E un espace euclidien et f une application de E dans E vérifiant $f(0)=0$ et, $\forall (x,y)\in E^2,\ \|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$.

a) Montrer que, pour tout $x\in E$, on a : $\|f(x)\| = \|x\|$ et $f(-x) = -f(x)$.

b) Montrer que, pour tout $(x,y)\in E^2$, on a : $\langle f(x),f(y)\rangle = \langle x,y\rangle$. En déduire que f est linéaire.