Exercice 1 *(CCINP 22)* Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E et $z \in E$.

a) Justifier l'existence de $\min\left\{\|f(x)-z\| \; ; \; x \in E\right\}$ et expliquer comment calculer ce minimum.

b) Déterminer ainsi $\min_{X\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})} \|AX+B\|$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 15 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 *(CCINP 21)* On munit l'espace E des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbf{R}$ du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer qu'il existe une famille orthogonale $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{R}[X]$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, Q_n est de degré n et de coefficient dominant égal à 1. Cette famille est-elle unique ?

b) Déterminer Q_0, Q_1, Q_2 et Q_3.

c) Pour tout $f \in E$, on définit $\widetilde{f} : t \mapsto f(-t)$. Montrer que : $\forall (f,g) \in E\times E,\ \langle \widetilde{f}, g\rangle = \langle f, \widetilde{g}\rangle$.
En déduire la parité de Q_n en fonction de n.

Exercice 3 *(Centrale 22)* Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
L'espace $\mathbf{R}^n$ est muni de sa base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ et du produit scalaire canonique.
Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, on pose $\delta(F) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} d(e_i,F)$.

a) Soit $G = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_1+\cdots+x_n = 0\}$.
Montrer que G est un sous espace vectoriel, préciser sa dimension et calculer $\delta(G)$.

b) Soit F un sous espace de $\mathbf{R}^n$ de dimension k.
Montrer que $\sum_{i=1}^{n} d(e_i,F)^2 = n-k$. Que peut-on en déduire concernant $\delta(F)$?

Exercice 4 *(CCINP 21)*

a) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $I_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} t^n\,\mathrm{d}t$, sachant que $I_0 = 1$.

b) Montrer que $(P,Q) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

c) Calculer, pour ce produit scalaire, la distance de X^3 à $\mathbf{R}_2[X]$.

Exercice 5 *(ENSEA 23)* Dans $E = \mathbf{R}_4[X]$ on pose $\phi(P,Q) = \int_{-2}^{2} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

a) Vérifier que ϕ est un produit scalaire.

b) Montrer que l'ensemble des polynômes pairs et l'ensemble des polynômes impairs sont des supplémentaires orthogonaux de E.

c) Déterminer une base orthogonale de E.

Exercice 6 *(Centrale 22)* Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_n$ telles que la série $\sum u_n^2$ converge.
Pour $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$ dans E, on pose $\langle u,v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

a) Montrer que E est un espace vectoriel et que $\langle\,,\,\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

b) Soit F l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension infinie.

c) Déterminer l'orthogonal de F puis la distance d'une suite quelconque de E à F.