Exercice 1 *(Centrale 21)* Montrer qu'il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes telle que :

i) pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n est de degré n et le coefficient dominant de P_n est positif

ii) pour tout $(m,n) \in \mathbf{N}^2$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(t)\,P_m(t)}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t = \delta_{m,n}$.

Calculer P_k pour les premières valeurs de k.

Exercice 2 *(CCINP 21)* Soit $n \in \mathbf{N}$ et $a \in [0,1]$. Pour $x \in]0,1]$ on pose $f_n(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{x^a(1+x^2)}$.

a) Montrer que f_n converge simplement vers une fonction que l'on précisera.

b) Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles il y a convergence uniforme ?

c) Montrer que l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ est convergente pour tout $a \in [0,1]$.

d) Discuter la convergence de la suite (I_n).

Exercice 3 *(CCINP 21)* Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in [0,1]$ on pose $g_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^t$.

a) Montrer que $\left|g_n'(t)\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^t}{n}$ pour tout $t \in [0,1]$; puis, que $\left|\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^t - 1\right| \leqslant \frac{t\,\mathrm{e}^t}{n}$.

b) Établir la convergence simple sur $[0,1]$ de $I_n(x) = \int_0^x \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.

c) Montrer que la convergence précédente est uniforme sur $[0,1]$.